Prépublications du Département de Mathématiques

Université de La Rochelle
Avenue Marillac
17042 La Rochelle Cedex 1
http://www.univ-lr.fr/Labo/MATH

La fonction thêta de Jacobi et la sommabilité des séries entières q-Gevrey, I

Changgui Zhang

Mai 2000

Classification: 33E05, 40G10, 39A13, 30E15.
Mots clés: Jacobi's theta function, Borel-Laplace transform, q-difference equation, Asymptotic expansion.

2000/03

La fonction thêta de Jacobi et la sommabilité des séries entières q-Gevrey, I

Changgui ZHANG

Résumé. Dans cette prépublication, première partie d'un article en préparation, nous présentons une nouvelle notion de développement asymptotique adaptée aux séries entières q-Gevrey d'ordre un. Nous montrons que cette asymptotique est liée, de manière naturelle, à la fonction thêta de Jacobi, q-analogue de la fonction exponentielle. Une méthode de resommation en est ainsi déduite.

Abstract (Jacobi's theta function and summability of q-Gevrey power series. I). This preprint is the first part of a paper in preparation. In the following, we present a new notion of asymptotic expansion adapted for one order q-Gevrey power series. It's shown that this asymptotic is naturally related to the Jacobi theta function, which is a q-analog of the usual exponential function. A summation method is then obtained.

Keywords and Subject Classification. Jacobi's theta function, Borel-Laplace transform, q-difference equation, Asymptotic expansion. 33E05, 40G10, 39A13, 30E15.

Abbreviated Title. La fonction thêta de Jacobi et les séries q-Gevrey.

0. Introduction

Dans tout ce qui suit, q **désigne un nombre réel strictement supérieur à un**.

(0.1) Dans [Zh1], on introduit une notion de développement asymptotique adaptée aux séries q-Gevrey d'ordre un. La définition est la suivante. Soient α un nombre réel, $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière et f une fonction analytique sur un disque ouvert en colimaçon $\{x \in \tilde{\mathbb{C}}^* : 0 < |x| < R\}$ de la surface de Riemann du logarithme notée $\tilde{\mathbb{C}}^*$. On dit que f admet $\hat{f}$ pour développement asymptotique q-Gevrey d'ordre un dans la direction d'argument α si pour tout $r \in]0, R[$, il existe des constantes C, $A > 0$ telles que: $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \tilde{\mathbb{C}}$ de module $|x| < r$,

$$|f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m x^m| < CA^n q^{\frac{1}{2}(n^2 + (\frac{\arg x - \alpha}{\ln q})^2)} |x|^n,$$

où $\arg x = Im(\log x)$, log désignant la détermination principale du logarithme.

Cette asymptotique est en quelque sorte une asymptotique "exacte", compte tenu de la propriété remarquable suivante. Si une fonction admet le même développement asymptotique dans deux directions distinctes, alors elle est uniquement déterminée. Par conséquent, d'une façon tout à fait analogue à ce que l'on a fait avec la notion de développement asymptotique Gevrey de Watson, on développe un procédé de resommation basé sur cette notion d'asymptoticité q-analogue. Ce dernier utilise, en effet, un formalisme fort similaire à la méthode de Borel-Laplace, en faisant intervenir la fonction $q^{\frac{1}{2}\log_q^2 x(\log_q x-1)}$ ($\log_q x = \frac{\log x}{\ln q}$) comme q-analogue de la fonction exponentielle.

(0.2) Comme l'a remarqué J. Sauloy dans sa thèse [Sa], la fonction thêta de Jacobi ($p = 1/q$)

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{-n(n-1)/2} x^n = \prod_{n=0}^{+\infty}(1-p^{n+1})(1+xp^n)(1+p^{n+1}/x)$$

non seulement joue le rôle de la fonction "q-exponentielle" dans la résolution formelle d'une équation aux q-différences, mais surtout présente un aspect "elliptique" : *uniforme*, quasi-invariante pour la q-différentielle $f(x) \mapsto f(qx)$. Ainsi, avons-nous étudié, dans l'article [Zh2], sur l'exemple de la solution formelle de l'équation aux q-différences vérifiée par la fonction q-Gamma de Jackson, comment sommer une série q-Gevrey à l'aide de la fonction θ de Jacobi. Cette étude donne lieu à un nouveau q-analogue de la fonction Gamma; et la méthode exploitée est susceptible d'être généralisée – c'est ce que nous voudrions montrer dans le présent article.

(0.3) L'article comporte trois parties; il est organisé de la manière suivante. Dans la première, on étudie une notion de développement asymptotique Gevrey q-analogue, beaucoup plus faible que celle proposée dans [Zh1]. On définit ensuite une transformation analytique de Borel q-analogue au moyen de la fonction θ, cette dernière jouant le même rôle que la fonction exponentielle dans le cas classique. En se restreignant à la classe des séries Gq-sommables au sens de [Zh1], on introduit une transformation de Laplace q-analogue avec la fonction θ et on obtient alors une nouvelle méthode de resommation. Le résultat un peu 'surprenant' de cette partie est le suivant (*cf* le corollaire (3.5)).

Soit φ un germe de fonction analytique en l'origine de $\mathbb{C}$. On suppose qu'il peut être prolongé en une fonction analytique et ayant une croissance du type $q^{\frac{1}{2}\log_q^2 x(\log_q x-1)}$ à l'infini dans un secteur illimité V.

*Alors φ représente une fonction entière si, et seulement si, pour tout $x \in V$ tel que $|x| < 1$, on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{-n(n+1)/2}\varphi(q^n x) = 0$ *.*

Par conséquent, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{-n(n+1)/2}\varphi(q^n x)$ est égal au polynôme nul si $\varphi \in \mathbb{C}[x]$.

Dans la deuxième partie, on étudie la sommabilité du produit de deux séries Gq-sommables d'ordre un et la multisommabilité avec θ. La troisième partie contient une application de notre méthode de resommation aux équations aux q-différences. Nous calculons les multiplicateurs de Stokes avec θ. Ce programme reste à détailler plus loin.

(0.4) Dans la suite, sauf mention expresse du contraire, on entend par *secteur ouvert* tout secteur limité sur la surface de Riemann du logarithme notée $\tilde{\mathbb{C}}^*$ de la forme

$$V = \{x \in \tilde{\mathbb{C}}^* : 0 < |x| < R, \alpha < \arg x < \beta\}, \quad R > 0,\ -\infty < \alpha < \beta < +\infty;$$

*A. Duval m'a aimablement indiqué que, si $\varphi = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$, l'expression $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{-n(n+1)/2}\varphi(q^n x)$ se développe terme à terme en $\sum_{k\geq 0} a_k x^k \theta(-q^{k-1})$, qui est identiquement nulle car θ s'annule en tout élément de $-q^{\mathbb{Z}}$.

on désigne par $\|V\|$ (ici, $= \beta - \alpha$) l'ouverture du secteur V et par $R(V)$ $(= R)$ son rayon $\sup\{|x| : x \in V\}$.

Première partie – Transformations de q-Borel-Laplace au moyen de la fonction θ

Dans cette partie, nous commencerons par une notion de développement asymptotique adoptée aux séries entières q-Gevrey. Nous donnerons ensuite quelques énoncés du type Malgrange-Sibuya-Ramis pour les classes de fonctions asymptotiques. Nous étudierons enfin des transformations analytiques du genre Borel-Laplace entre certaines classes de fonctions "q-Gevrey".

1. Développement asymptotique Gevrey d'ordre $(q;1)$

La notion de développement asymptotique q-Gevrey que l'on va étudier dans la suite est beaucoup plus faible que celle rappelée au début de l'article.

(1.1) Définition – Soient f une fonction analytique sur un secteur ouvert V et $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière. On dit que f admet $\hat{f}$ pour *développement asymptotique Gevrey d'ordre* $(q;1)$ *sur* V si, pour tout sous-secteur U relativement compact de V (*i.e.* $\alpha_V < \alpha_U < \beta_U < \beta_V$ et $R(U) < R(V)$), il existe des constantes A, $C > 0$ telles que, $\forall x \in U$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m x^m| < CA^n q^{n(n-1)/2} |x|^n.$$

Lorsque c'est le cas, on note $f \in \mathbb{A}_{q;1}(V)$ et $f \sim_{q;1}^{V} \hat{f}$.

On remarquera aussitôt que si $f \in \mathbb{A}_{q;1}(V)$, alors son développement est unique et il appartient à la classe des séries q-Gevrey d'ordre un notée $\mathbb{C}[[x]]_{q;1}$.

(1.2) On note $T : \mathbb{A}_{q;1}(V) \to \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ l'application "Série de Taylor" définie par la relation : $f \sim_{q;1}^{V} T(f)$.

Notons que T est surjective. En effet, d'après la proposition 2.2.1 de [Zh1], à tout $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ correpond une fonction analytique sur un disque en colimaçon de $\tilde{\mathbb{C}}^*$ qui admet $\hat{f}$ pour développement asymptotique q-Gevrey d'ordre un dans une direction donnée d'avance; cette fonction est asymptotique, au sens de la définition (1.1), à $\hat{f}$ sur tout secteur d'ouverture finie. Cette correspondance est faite au moyen d'une transformation de q-Borel formelle dont la définition est rappelée ci-dessous.

(1.3) Soit $\hat{f}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$; par définition, on appelle *transformée de q-Borel d'ordre un de* $\hat{f}$ la série entière $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ définie par :

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}(\xi) = \sum_{n\geq 0} a_n q^{-n(n-1)/2} \xi^n.$$

Lorsque $\hat{f}$ est q-Gevrey d'ordre un, la transformée $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ est convergente au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}$ et on peut lui appliquer ensuite une transformation de

q-Laplace tronquée. Nous renvoyons à la page 243 de l'article [Zh1] pour plus de précision.

Désignons par $\mathbb{E}_{q;-1}(V)$ l'ensemble des fonctions analytiques f sur V vérifiant la propriété suivante. Pour tout sous-secteur U relativement compact de V, il existe des constantes $C > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in U, \quad |f(x)| \leq C|x|^\mu |q^{-\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x - 1)}|.$$

Tout élément de $\mathbb{E}_{q;-1}(V)$ sera appelé *fonction q-plate d'ordre un sur V* ou encore *fonction à décroissance q-exponentielle d'ordre un sur V*.

(1.4) Lemme ([Zh1], p. 238) – *Avec les notations précédentes, on a* $\ker T = \mathbb{E}_{q;-1}(V)$.

Par conséquent, l'application T induit un isomorphisme entre les $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels* $\mathbb{A}_{q;1}(V)/\mathbb{E}_{q;-1}(V)$ *et* $\mathbb{C}[[x]]_{q;1}$. □

(1.5) Contrairement à ce qui s'est passé avec la notion de développement asymptotique q-Gevrey de [Zh1], l'ensemble $\mathbb{A}_{q;1}(V)$ est stable pour le produit. En effet, par un calcul directe, on peut vérifier que pour tout $(f, g) \in \mathbb{A}_{q;1}(V)$, on a $fg \in \mathbb{A}_{q;1}(V)$ et $T(fg) = T(f)T(g)$.

Si V est un secteur ouvert d'ouverture $> 2\pi$, notons $V_- = \{x \in V : xe^{2\pi i} \in V\}$. Pour tout élément $f \in \mathbb{A}_{q;1}(V)$, on pose $\mathrm{var} f(x) = f(xe^{2\pi i}) - f(x)$ si $x \in V_-$. On a $\mathrm{var} f \in \mathbb{E}_{q;-1}(V_-)$, d'après le lemme 1.4; d'où l'on obtient une application linéaire $\mathrm{var} : \mathbb{A}_{q;1}(V) \to \mathbb{E}_{q;-1}(V_-)$. Puisque $\mathrm{var} f = 0$ pour tout $f \in \mathbb{C}\{x\}$ ayant un rayon de convergence supérieur ou égal au rayon $R(V)$, on définit de manière naturelle une application de $\mathbb{A}_{q;1}(V)/(\mathbb{C}\{x\} \cap \mathbb{A}_{q;1}(V))$ dans $\mathbb{E}_{q;-1}(V_-)$ notée encore var. Cette dernière est clairement injective. Le lemme suivant exprimera que, à peu de chose près, elle est en fait bijective.

(1.6) Lemme – *Soient U, V deux secteurs ouverts, distincts, tous deux d'ouverture* $> 2\pi$ *et vérifiant* $U \Subset V$. *Alors pour tout élément h de* $\mathbb{E}_{q;-1}(V_-)$ *il existe un* $f \in \mathbb{A}_{q;1}(U)$ *tel que* $\mathrm{var} f = h$ *sur* U_-.

Preuve – On va appliquer la formule de Cauchy-Heine (*cf* [Ma]); sans perte de la généralité, on suppose que U et V ont une même ouverture qui est $> 2\pi$. On se fixe un point $b_0 = |b_0|e^{i\beta_0}$ dans V_- qui **n'appartient pas à** U_-, on note Γ_{b_0} le segment allant du point b_0 vers 'l'origine' de $\tilde{\mathbb{C}}^*$; on pose, pour tout $x \in U_{b_0} := \{x \in U : \beta_0 < \arg x < \beta_0 + 2\pi\}$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{b_0}} \frac{h(u)}{u - x} du.$$

Il est clair que f est analytique dans son domaine de définition. Pour voir que $f \in \mathbb{A}_{q;1}(U_{b_0})$, on écrit

$$\int_{\Gamma_{b_0}} \frac{h(u)}{u - x} du = \sum_{n=0}^{m} x^n \int_{\Gamma_{b_0}} h(u)u^{-(n+1)} du + x^{m+1} \int_{\Gamma_{b_0}} \frac{h(u)}{u - x} \frac{du}{u^n},$$

et on pose $\hat{f} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{b_0}} h(u)u^{-(n+1)} du.$$

Soit W un sous-secteur relativement compact de U_{b_0}; on pose $d = \inf_{x\in W, u\in\Gamma_{b_0}} |1-\frac{x}{u}|$ et, par compacité relative de W dans $U\setminus\Gamma_{b_0}$, on a $d>0$. Du fait que $h\in\mathbb{E}_{q;-1}(V_-)$ et que pour tout $\mu\in\mathbb{R}$, il existe C, $A>0$ vérifiant : $\forall m\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_0^{|b_0|} q^{-\log_q u(\log_q u-1)/2} u^{\mu-m-1}du &< \int_0^{+\infty} q^{-\log_q u(\log_q u-1)/2} u^{\mu-m-1}du \\ &= CA^m q^{(m+1)m/2},\end{aligned}$$

on conclut aisément à l'asymptoticité $f \sim_{q;1}^{U_{b_0}} \hat{f}$.

La fonction f peut être prolongée sur U de la manière suivante. A tout point $b=|b_0|e^{i\beta}$ ($\beta\in\mathbb{R}$) de V_- on associe le chemin Γ_b obtenu en juxtaposant l'arc orienté du cercle de rayon $|b_0|$, allant de b_0 vers b, et le segment joignant le point b à l'origine; on substitue ensuite le chemin Γ_{b_0} par Γ_b dans l'intégrale définissant f. La fonction ainsi obtenue sera encore notée f. Par Cauchy, on vérifie aisément que var$f=h$ sur U_-. Avec le même argument que celui utilisé précédemment pour U_{b_0}, on obtient que $f\sim_{q;1}^{U_b}\hat{f}$ et par suite $f\sim_{q;1}^{U}\hat{f}$. $\square$

Etant donné un nombre réel α, notons $\mathcal{V}^\alpha$ la famille des secteurs ouverts bissectés par la direction d'argument α et ayant chacun une ouverture $>2\pi$, et posons

$$\mathbb{A}_{q;1}^\alpha = \cup_{V\in\mathcal{V}^\alpha}\mathbb{A}_{q;1}(V), \quad \mathbb{E}_{q;-1}^\alpha = \cup_{V\in\mathcal{V}^\alpha}\mathbb{E}_{q;-1}(V_-).$$

Le lemme (1.6) implique directement le résultat suivant.

(1.7) Proposition – *L'application* var *induit un isomorphisme entre les espaces vectoriels* $\mathbb{A}_{q;1}^\alpha/\mathbb{C}\{x\}$ *et* $\mathbb{E}_{q;-1}^\alpha$. $\square$

Considérons un résultat du type Malgrange-Sibuya-Ramis. Soit $\{V_j\}_{1\le j\le J}$ une famille finie de secteurs ouverts; on pose $V_{J+1}=\{xe^{2\pi i} : x\in V_1\}$. On suppose que, d'une part, $\cup_{1\le j\le J}V_j$ est un secteur d'ouverture $>2\pi$, et d'autre part, pour toute paire d'indices (j,k) vérifiant $1\le j<k-1\le J$, $V_j\cap V_k=\emptyset$. Supposons en outre qu'il y a sur chaque V_j une fonction analytique et *bornée* f_j. On pose, pour tout indice j entre 1 et J : $f_{j,j+1}(x)=f_{j+1}(x)-f_j(x)$ si $x\in V_{j+1}\cap V_j$.

(1.8) Corollaire – *Avec les notations ci-dessus, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe un $\hat{f}\in\mathbb{C}[[x]]$ *tel que* $f_j\sim_{q;1}^{V_j}\hat{f}$ *pour* $j=1, \ldots, J$.

(ii) On a $f_{j,j+1}\in\mathbb{E}_{q;-1}(V_{j+1}\cap V_j)$ *pour* $j=1, \ldots, J$.

Preuve – L'implication de (i) vers (ii) résulte du lemme (1.4); l'autre implication résulte de la linéarité du problème et du lemme (1.6) (*cf* [Ma], p. ?). $\square$

(1.9) Pour terminer la partie, on mentionne quelques observations.

(i) Bien que $\mathbb{A}_{q;1}^\alpha$ soit stable pour le produit, l'espace quotient $\mathbb{A}_{q;1}^\alpha/\mathbb{C}\{x\}$ ne l'est plus.

(ii) Pour tout nombre réel $s>0$ posons $\mathbb{A}_{q;s}^\alpha=\mathbb{A}_{q^s;1}^\alpha$, $\mathbb{E}_{q;-1/s}^\alpha=\mathbb{E}_{q^s;-1}^\alpha$. Si $s'>s>0$, on a :

$$\mathbb{A}_{q;s}^\alpha\subset\mathbb{A}_{q;s'}^\alpha, \quad \mathbb{E}_{q;-1/s}^\alpha\subset\mathbb{E}_{q;-1/s'}^\alpha.$$

($\mathbb{E}_{q;-k}^\alpha$ est l'ensemble des fonctions q-plates d'ordre k) La proposition précédente affirme alors que var : $\mathbb{A}_{q;s}^\alpha/\mathbb{C}\{x\}\to\mathbb{E}_{q;-1/s}^\alpha$ est bijective.

2. Fonction θ et transformation de q-Borel analytique

La fonction θ de Jacobi définie par (0.2) vérifie l'équation fonctionnelle aux q-différences

$$y(qx) = qxy(x),$$

laquelle est satisfaite par la fonction $q^{\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x+1)}$ également. En plus, comme $\theta(x)$ ne s'annule que si $x \in \{-q^n : n \in \mathbb{Z}\}$, on en déduit que pour tout $\varepsilon \in]0,\pi[$, il existe des constantes C_1, $C_2 > 0$ telles que si $x \in \mathbb{C}^*$, $-\pi+\varepsilon < \arg x < \pi - \varepsilon$, alors

$$C_1|q^{\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x+1)}| < |\theta(x)| < C_2|q^{\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x+1)}|.$$

On dira que θ est à croissance q-exponentielle d'ordre un et de type fini dans $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0[$. La définition générale est la suivante (*cf* [Ra], [Zh1]).

(2.1) Définition et notations – Soient $U = \{x \in \tilde{\mathbb{C}}^* : \alpha < \arg x < \beta\}$ un secteur ouvert illimité de $\tilde{\mathbb{C}}^*$ et f une fonction analytique dans U; on dit que f admet à l'infini (resp. en 'l'origine') sur U *une croissance q-exponentielle d'ordre un et de type fini* si pour tout $\varepsilon > 0$ petit, il existe $R > 0$, $C > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait

$$|f(x)| \leq C|x|^{\mu}|q^{\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x-1)}|$$

pour tout $x \in U$ vérifiant $|x| > R$ (resp. $0 < |x| < R$), $\alpha+\varepsilon < \arg x < \beta - \varepsilon$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; on notera $\mathbb{H}_{q;1}^{\alpha}$ l'ensemble des germes de fonctions analytiques en l'origine du plan complexe qui peuvent être prolongés en une fonction analytique, admettant une croissance q-exponentielle d'ordre un et de type fini dans un secteur illimité contenant la direction d'argument α. On note aussi $\mathbb{E}_{q;1}$ l'ensemble des fonctions entières ayant à l'infini une croissance q-exponentielle d'ordre un et de type fini; on a $\mathbb{E}_{q;1} = \cap_{\alpha\in[0,2\pi]}\mathbb{H}_{q;1}^{\alpha}$.

(2.2) Posons $\theta_0(x)$ la fonction entière définie par $\theta_0(x) = \sum_{n\geq 0} q^{-n(n-1)/2}x^n$. On a $\theta_0 \in \mathbb{E}_{q;1}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{C}^*, \quad |\theta_0(x)| < C|q^{\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x+1)}|,$$

où $C > 0$ est une constante, $Im(\log x) \in [-\pi,\pi[$.

Soit V un secteur ouvert d'ouverture $> 2\pi$, bissecté par la direction d'argument α; à tout point $a = |a|e^{(\alpha-\pi)i}$ situé sur la bissectrice du secteur V_- on associe deux chemins $[0,a]$, γ_a définis dans V comme suit. On note $[0,a]$ celui allant de l'origine vers le point a suivant la bissectrice de V_-; γ_a celui paramétrisé par $[0,2\pi] \to V$, $t \mapsto |a|e^{(\alpha-\pi+t)i}$.

(2.3) Si $f \in \mathbb{A}_{q;1}(V)$, on pose

$$\mathcal{B}_{q;1}f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{[0,a]} \theta(\frac{\xi}{x})\mathrm{var}f(x)\frac{dx}{x} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_a} \theta(\frac{\xi}{x})f(x)\frac{dx}{x}.$$

Pour tout élément $\xi \in \tilde{\mathbb{C}}^*$, la fonction différence $x \mapsto \theta(\frac{\xi}{x}) - \theta_0(\frac{\xi}{x})$ est une fonction entière; on en déduit une **définition équivalente** de $\mathcal{B}_{q;1}f(\xi)$:

$$\mathcal{B}_{q;1}f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{[0,a]} \theta_0(\frac{\xi}{x})\mathrm{var}f(x)\frac{dx}{x} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_a} \theta_0(\frac{\xi}{x})f(x)\frac{dx}{x}.$$

(2.4) Lemme – *La fonction $\mathcal{B}_{q;1}f$ ci-dessus est définie et analytique au voisinage de l'origine du plan compelxe et indépendante du choix du point a sur la bissectrice de V_-.*

En outre, si $f \sim_{q;1}^{V} \hat{f}$, alors les $\mathcal{B}_{q;1}f$, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ sont égaux dans $\mathbb{C}\{\xi\}$.

Preuve – Considérons la définition de $\mathcal{B}_{q;1}f$ en terme de θ_0; notons B la bissectrice de V_-, incluse dans ce dernier. Comme $\mathrm{var} f \in \mathbb{E}_{q;-1}(V_-)$, il existe $C > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ vérifiant $|\mathrm{var} f(x)| < C|x|^{\mu}|q^{-\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x-1)}|$ pour tout $x \in B$; avec la croissance q-exponentielle d'ordre un de θ_0, on en déduit que l'intégrale prise le long le segment $[0,a]$ converge si $|\xi| < q^{\mu}$. Puisque l'autre intégrale, relative au contour γ_a, définit une fonction entière dans le plan des ξ, on obtient que $\mathcal{B}_{q;1}f(\xi)$ est une fonction définie et analytique au voisinage de l'origine. Son indépendance par rapport au choix de $a \in B$ est une conséquence directe du théorème de Cauchy.

Supposons $f \sim_{q;1}^{V} \hat{f}$ et notons, pour tout entier $n > 0$, f_n la somme partielle d'ordre n de $\hat{f}$. Substituons f par f_n dans la définition de $\mathcal{B}_{q;1}f$; la première intégrale est nulle et la seconde donne $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}f_n$ par Cauchy (voir (1.3) pour la définition de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$); autrement dit, on a $\mathcal{B}_{q;1}f_n(\xi) = \hat{\mathcal{B}}_{q;1}f_n(\xi)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour terminer la preuve, il suffit de prouver que, étant donné un complexe ξ de module $|\xi|$ assez petit où $\mathcal{B}_{q;1}f(\xi)$ est définie, la suite $(\mathcal{B}_{q;1}f(\xi) - \mathcal{B}_{q;1}f_n(\xi))$ tend vers zéro avec $1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Posons $R_n(\xi) = 2\pi i(\mathcal{B}_{q;1}f(\xi) - \mathcal{B}_{q;1}f_n(\xi))$; on a

$$\begin{aligned}
|R_n(\xi)| &\leq \int_0^{|a|} \theta_0(\frac{|\xi|}{x})|\mathrm{var} f(xe^{(\alpha-\pi)i})|\frac{dx}{x} + 2\pi\theta_0(\frac{|\xi|}{|a|})\max_{x\in\gamma_a}|f(x) - f_n(x)| \\
&\leq Cq^{\frac{1}{2}\log_q|\xi|(\log_q|\xi|+1)}(\int_0^{|a|} x^{\mu-1-\log_q|\xi|}dx + M_n(|a|)),
\end{aligned}$$

où C désigne une constante indépendante de n, ξ et de a, et où

$$M_n(|a|) = C'A^n|a|^{n-\log_q|\xi|}q^{n(n-1)/2+\log_q|a|(\log_q|a|-1)/2},$$

avec C', $A > 0$ deux autres constantes. Choisissons à présent a qui minimise M_n. En dérivant la fonction $t \mapsto M_n(t)$ sur $]0,+\infty[$, on trouve que $M_n'(t) = 0$ pour $t = q^{-n+1/2}|\xi|$, et en ce point on a :

$$M_n(t) = C'q^{-\frac{1}{2}(\log_q|\xi|+\frac{1}{2})^2}(A|\xi|)^n.$$

Supposons $|\xi| < \min(\frac{1}{A}, q^{\mu})$. Pour tout n suffisamment grand, en choisissant $a \in B$ avec $|a| = q^{-n+1/2}|\xi|$ dans la définition de $\mathcal{B}_{q;1}f$, on déduit des calculs de R_n, M_n, l'estimation suivante :

$$|R_n(\xi)| < \frac{Cq^{\mu/2}|\xi|^{\mu}}{\mu - \log_q|\xi|}q^{-\frac{1}{2}\log_q^2|\xi|}(q^{-\mu}|\xi|)^n + CC'q^{-1/8}(A|\xi|)^n;$$

d'où $R_n(\xi) \to 0$ si $n \to +\infty$. □

Il est à noter la propriété suivante.

(2.5) *Si f est la Gq-somme d'une série Gq-sommable d'ordre un dans la direction d'argument α, alors le lemme précédent implique que la transformée $\mathcal{B}_{q;1}f$ de (2.3)* **coïncide** *avec celle calculée au moyen de la fonction q-exponentielle $q^{\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x-1)}$.*

(2.6) Définition – La transformation $\mathcal{B}_{q;1} : \mathbb{A}_{q;1}^{\alpha} \to \mathbb{C}\{\xi\}$ définie dans (2.3) est appelée *la transformation de q-Borel analytique d'ordre un.*

Du fait que $\mathcal{B}_{q;1}f \in \mathbb{E}_{q;1}$ si et seulement si $f \in \mathbb{C}\{x\}$, on peut déduire des lemmes (1.4), (2.4) le résultat suivant.

(2.7) Proposition – *La transformation de q-Borel d'ordre un, $\mathcal{B}_{q;1}$, induit un homomorphisme surjectif d'espace vectoriel de $\mathbb{A}_{q;1}^{\alpha}/\mathbb{C}\{x\}$ sur $\mathbb{C}\{\xi\}/\mathbb{E}_{q;1}$.* □

L'intégrale de $\xi \mapsto f(\xi)\theta_0(\frac{x}{\xi})$ le long le chemin γ_a définit un élément de $\mathbb{E}_{q;1}$. L'application étudiée dans la proposition précédente peut être reformulée par l'autre intégrale, donc au moyen d'une intégrale près de l'origine sur var$f$; ceci présente un formalisme fort similaire à la transformation de Laplace étudiée dans [CNP] (Pré I, Transformation de Laplace), malgré une incohérence apparente de l'usage de la terminologie. Remarquons aussi que $\mathcal{B}_{q;1}$ n'est pas injective dans $\mathbb{A}_{q;1}^{\alpha}$; on a en effet :

$$\mathcal{B}_{q;1}f = \mathcal{B}_{q;1}g \Longleftrightarrow f - g \in \mathbb{E}_{q;-1}^{\alpha}.$$

3. Fonction θ et séries q-Gevrey sommables

Soient α un nombre réel et $\mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\alpha}$ l'ensemble des *séries Gq-sommables d'ordre un* dans la direction d'argument α; par définition, $\mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\alpha}$ est constitué des séries q-Gevrey d'ordre un dont la transformée de q-Borel formelle d'ordre un appartient à la classe $\mathbb{H}_{q;1}^{\alpha}$.

(3.1) Soient $\varphi \in \mathbb{H}_{q;1}^{\alpha}$ et $\pi_q = \ln q \prod_{n\geq 0}(1 - q^{-n-1})^{-1}$; **on pose :**

$$\mathbf{L}_{q;1}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\pi_q}\int_0^{\infty e^{i\alpha}} \frac{\varphi(\xi)}{\theta(\frac{\xi}{x})}\frac{d\xi}{\xi},$$

l'intégrale étant prise le long la demi-droite issue de l'origine de $\mathbb{C}$ et ayant α pour argument.

(3.2) Lemme – *On a les assertions suivantes. (i) Si φ est un polynôme de la forme $a_0 + a_1\xi + ... + a_m\xi^m$, alors la fonction $\mathbf{L}_{q;1}^{\alpha}\varphi$ définie par (3.1) est égale à la fonction polynomiale $\sum_{k=0}^{m} a_k q^{k(k-1)/2}x^k$. (ii) De manière plus générale, si $\varphi \in \mathbb{H}_{q;1}^{\alpha}$ et si $\varphi = \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ ($\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\alpha}$), alors $\mathbf{L}_{q;1}^{\alpha}\varphi$ définit un élément de $\mathbb{A}_{q;1}^{\alpha}$ qui admet $\hat{f}$ pour développement asymptotique.*

Preuve – La première assertion a été prouvée dans le lemme (6.4) de [Zh2]. La seconde peut être démontrée de la même manière que ce que l'on a fait pour la proposition 2.2.1 de [Zh1]; nous laissons au lecteur le soin de compléter la preuve. □

(3.3) Définition – L'application $\mathbf{L}_{q;1}^{\alpha} : \mathbb{H}_{q;1}^{\alpha} \to \mathbb{A}_{q;1}^{\alpha}$ est appelée *transformation de q-Laplace analytique d'ordre un relative à θ dans la direction d'argument α.*

Pour tout $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\alpha}$, la fonction $\mathbf{L}_{q;1}^{\alpha}\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ sera notée $\mathbf{S}_{q;1}^{\alpha}\hat{f}$ et sera appelée *la θ-somme de $\hat{f}$ dans la direction d'argument α.*

Notons d'abord que l'application $\mathbf{L}_{q;1}^{\alpha}$ envoie $\mathbb{E}_{q;1}$ sur $\mathbb{C}\{x\}$, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$; nous verrons qu'elle n'est pas surjective de $\mathbb{H}_{q;1}^{\alpha}$ vers $\mathbb{A}_{q;1}^{\alpha}$.

(3.4) Théorème – *Soient* $\varphi \in \mathbb{H}_{q;1}^\alpha$ *et* $f = \mathbf{L}_{q;1}\varphi$. *On a :*

$$\mathrm{var} f(x) = \frac{2\pi i}{\pi_q} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{-n(n+1)/2} \varphi(-q^n x)$$

pour tout x *élément d'un germe de secteur ouvert* V_- *bissecté par la direction d'argument* $(\alpha - \pi)$.

De plus, f *est l'***unique** *élément de* $\mathbb{A}_{q;1}^\alpha$ *ayant* $\hat{f}$ *pour développement asymptotique et dont la variation soit donnée par la formule ci-dessus.*

Preuve – La formule exprimant $\mathrm{var} f$ est une simple conséquence de la formule de Cauchy appliquée à l'intégrale de contour exprimant la fonction différence $\mathbf{L}_{q;1}^{\alpha+\varepsilon}\varphi - \mathbf{L}_{q;1}^{\alpha-\varepsilon}\varphi$ sur V_- où $\varepsilon > 0$ est très petit. L'unicité résulte de l'observation suivante : Deux éléments f, g de $\mathbb{A}_{q;1}^\alpha$ diffèrent d'un germe de fonction analytique à l'origine du plan complexe si et seulement si leurs variations coïncident. □

Posons alors $U^\alpha : \mathbb{H}_{q;1}^\alpha \to \mathbb{E}_{q;-1}^\alpha$ le composé de $\mathbf{L}_{q;1}^\alpha$ avec var :

$$U^\alpha(\varphi)(x) = \frac{2\pi i}{\pi_q} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{-n(n+1)/2} \varphi(-q^n x).$$

On a $U^\alpha(\varphi)(x) = \mathbf{S}_{q;1}^\alpha \hat{f}(xe^{2\pi i}) - \mathbf{S}_{q;1}^\alpha \hat{f}(x)$ si $\varphi = \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ avec $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^\alpha$.

(3.5) Corollaire – *On a* $U^\alpha(\varphi) = 0$ *si et seulement si* $\varphi \in \mathbb{E}_{q;1}$. *En particulier, si* φ *est un polynôme, alors on a :*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{-n(n+1)/2} \varphi(-q^n x) \equiv 0.$$

Preuve – Il suffit de remarquer que $\varphi = \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ est un élément de $\mathbb{E}_{q;1}$ si et seulement si $\hat{f}$ représente un germe de fonction analytique à l'origine de $\mathbb{C}$, donc uniforme. □

On pourrait envisager de donner un énoncé plus général portant sur les fonctions à croissance q-exponentielle d'ordre un et de type fini en l'origine et à l'infini dans un secteur illimité; la situation typique est alors celle des polynômes en x et $\frac{1}{x}$.

(3.6) Le théorème 3.4 peut être interprété de la manière suivante. Soit $u \in \mathbb{E}_{q;-1}^\alpha$ et soit $\Psi \in \mathbb{C}\{x\}$ la fonction correspondant à la la transformée de q-Borel évaluée le long du segment $[0, a]$:

$$\Psi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{[0,a]} u(x)\theta_0(\frac{\xi}{x})\frac{dx}{x}.$$

Si $\Psi \in \mathbb{H}_{q;1}^\alpha$, on a nécessairement $u = U^\alpha\Psi$ †.

(3.7) Corollaire – *Si* $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^\alpha$ *et* $g \in \mathbb{C}\{x\}$, *alors* $\mathbf{S}_{q;1}^\alpha(g\hat{f}) = g\mathbf{S}_{q;1}^\alpha(\hat{f})$.

† De façon similaire à la formule de Cauchy classique, cette formule pourrait être obtenue au moyen des *hyperfonctions*. En effet, d'après (3.5), on a $U^\alpha\theta_0(\frac{\xi}{x}) = 0$, et ceci seulement quand $|\xi| < |x|$; que se passe-t-il quand $x = \xi$?

Preuve – Dans [Zh1], on a déjà démontré que $g\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\alpha}$. Posons $f(x) = \mathbf{S}_{q;1}^{\alpha}\hat{f}(x)$ pour tout x élément d'un germe V de secteur ouvert d'ouverture $> 2\pi$, bissecté par α; on a d'une part $gf \sim_{q;1}^{V} g\hat{f}$, et, d'autre part, $\mathrm{var}(gf) = g\ \mathrm{var}f$ sur V_-. Compte tenu du théorème 3.4, il suffit de prouver que si $\varphi = \mathcal{B}_{q;1}(gf)$, on a $g\ \mathrm{var}f = U^{\alpha}\varphi$; ceci se fait avec la remarque donnée dans (3.6) et la relation suivante, déduite du corollaire (3.5) :

$$U^{\alpha}\varphi = U^{\alpha}\Psi \quad \text{où } \Psi = \frac{1}{2\pi i}\int_{[0,a]} g(\mathrm{var}f)\theta_0(\frac{\xi}{x})\frac{dx}{x} \quad \square$$

Le résultat que nous venons d'obtenir affirme que l'ensemble $\mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\alpha}$ constitue un $\mathbb{C}\{x\}$-module compatible avec l'opérateur de sommation $\mathbf{S}_{q;1}^{\alpha}$. Comme le montreront les exemples qui suivent, cette propriété sera très importante pour étudier la θ-somme d'une série entière vérifiant une équation aux q-différences.

(3.8) Exemples. La série entière $\hat{f}_0 := \sum_{n\geq 0}(-1)^n q^{n(n-1)/2}x^n$ est solution formelle de l'équation (E) : $xy(qx) + y(x) = 1$; sa transformée de q-Borel formelle d'ordre un notée φ vaut $\frac{1}{1+\xi}$, donc $\hat{f}_0 \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\alpha}$ pour tout réel α tel que $\alpha \neq \pi$ mod2π; de plus, la θ-somme $\mathbf{S}_{q;1}^{\alpha}\hat{f}_0$ est solution analytique de (E), d'après (3.7). Si $x \in \mathbb{C}$ vérifie $q^n x \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a, par Cauchy :

$$U^{\alpha}(\varphi)(x) = -\frac{2\pi i}{\pi_q}\frac{1}{\theta(-\frac{1}{x})} = -\frac{2\pi i}{\pi_q}\frac{1}{\theta(-\frac{x}{q})}.$$

En tant que différence de deux solutions de (E), $U^{\alpha}(\varphi)(x)$ est alors solution de l'équation homogène associée (E_0) : $xy(qx) + y(x) = 0$.

La série de Laurent $\hat{F}(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n(n-1)/2}x^n$ est une solution formelle de l'équation (E_0). Décomposons $\hat{F}(x)$ en somme de deux séries entières de la manière suivante :

$$\hat{F}(x) = \hat{f}_0 + \hat{F}_-(\frac{1}{x}), \qquad F_-(t) \in t\mathbb{C}[[t]];$$

on a $\hat{F}_-(x) = -\frac{1}{qx}\hat{f}_0(\frac{1}{q^2x})$; d'où $\hat{F}_-$ et par suite $\hat{F}$ elle-même est sommable dans toute direction non congruente à $\mathbb{R}^-$. Désignons par F la somme $\mathbf{S}_{q;1}^{\alpha}\hat{f}_0 + \mathbf{S}_{q;1}^{\alpha}\hat{F}_-$; par Cauchy, on obtient :

$$F(x) = \frac{2\pi i}{\pi_q}\frac{1}{\theta(-\frac{x}{q})}.$$

(Une interprétation heuristique de ce dernier résultat peut se faire de la manière suivante : On associe à $\hat{F}$ sa transformée de q-Borel, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\xi^n$, qui est nulle sauf en $\xi = -1$ et qui est alors la fonction de Dirac en ce point...)

Considérons enfin le cas où φ possède un pôle multiple, et posons par exemple $\varphi = \frac{1}{(\xi+1)^2}$. Avec la formule des résidus, on obtient :

$$U^{\alpha}(\varphi)(x) = -\frac{2\pi i}{\pi_q}\frac{\theta'(-\frac{1}{x})}{x\theta^2(-\frac{1}{x})} = \frac{2\pi i}{q\pi_q}\frac{x\theta'(-\frac{x}{q})}{\theta^2(-\frac{x}{q})}.$$

Soit $\hat{f} = \hat{\mathcal{L}}_{q;1}\varphi$; on peut vérifier que $\hat{f}$ satisfait à l'équation $(x\sigma_q + 1)^2 y = 1$, où σ_q est l'opérateur aux q-différences $f(x) \mapsto f(qx)$. La fonction $U^\alpha(\varphi)$ est solution de l'équation homogène $(x\sigma_q + 1)^2 y = 0$, qui se transforme, avec $y = z/\theta(-\frac{x}{q})$, en celle-ci : $(\sigma_q - 1)^2 z = 0$; par là on comprend mieux la présence dans $U^\alpha(\varphi)$ de la fonction logarithme q-analogue $\frac{x\theta'(-\frac{x}{q})}{\theta(-\frac{x}{q})}$ définie dans la Thèse [Sa] de J. Sauloy.

===== Fin de la première partie =====

Références.

[CNP] B. Candelpergher, J.C. Nosmas et F. Pham, Approche de la résurgence, 1993, Hermann.

[Ma] B. Malgrange, Sommation des séries divergentes, *Expositiones Mathematicae*, **13** (1995), no 2-3, 163-222.

[Ra] J.P. Ramis, About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations, *Annales de la Fac. de Toulouse*, Série 6, Vol. I, **1** (1992), 53-94.

[Sa] J. Sauloy, Théorie de Galois des équations aux q-différences fuchsiennes, *Thèse de Toulouse*, 1999.

[Zh1] C. Zhang, Développements asymptotiques q-Gevrey et séries Gq-sommables, *Ann. Inst. Fourier*, **49-1** (1999), 227-261.

[Zh2] C. Zhang, Sur la fonction q-Gamma de Jackson, *Prépublication de La Rochelle*, **99-4** (1999).

Département et Laboratoire de Mathématiques
Pôle Sciences et Technologie, Université de La Rochelle
Avenue M. Crépeau, F-17000 La Rochelle

e-mail : czhang@univ-lr.fr

(Le 6 mars 2000, La Rochelle)

Liste des prépublications

99-1 Monique Jeanblanc et Nicolas Privault. A complete market model with Poisson and Brownian components.

99-2 Laurence Cherfils et Alain Miranville. Generalized Cahn-Hilliard equations with a logarithmic free energy. A paraître dans *Revista de la Real Academia de Ciencias.*

99-3 Jean-Jacques Prat et Nicolas Privault. Explicit stochastic analysis of Brownian motion and point measures on Riemannian manifolds. *Journal of Functional Analysis*, Vol. **167**, pp. 201-242, 1999.

99-4 Changgui Zhang. Sur la fonction q-Gamma de Jackson.

99-5 Nicolas Privault. A characterization of grand canonical Gibbs measures by duality. A paraître dans *Potential Analysis.*

99-6 Guy Wallet. La variété des équations surstables. A paraître dans *Bulletin de la Société Mathématique de France.*

99-7 Nicolas Privault et Jiang-Lun Wu. Poisson stochastic integration in Hilbert spaces. *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, Vol. **6**, pp. 41-61, 1999.

99-8 Augustin Fruchard et Reinhard Schäfke. Sursabilité et résonance.

99-9 Nicolas Privault. Connections and curvature in the Riemannian geometry of configuration spaces.

99-10 Fabienne Marotte et Changgui Zhang. Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique. A paraôtre dans Annales de l'Institut Fourier, 2000.

99-11 Knut Aase, Bernt Øksendal, Nicolas Privault et Jan Ubøe. White noise generalizations of the Clark-Haussmann-Ocone theorem with application to mathematical finance. A paraître dans *Finance and Stochastics.*

00-01 Eric Benoît. Canards en un point pseudo-singulier nœud. A paraître dans *Bulletin de la Société Mathématique de France.*

00-02 Nicolas Privault. Hypothesis testing and Skorokhod stochastic integration. A paraître dans *Journal of Applied Probability.*

00-03 Changgui Zhang. La fonction thêta de Jacobi et la sommabilité des séries entières q-Gevrey, I.