Prépublications du Département de Mathématiques

Université de La Rochelle
Avenue Michel Crépeau
17042 La Rochelle Cedex 1
http ://www.univ-lr.fr/Labo/MATH

Déformation topologique par changement d'échelle

Guy Wallet

Mai 2000

Classification : 03H05, 03H10, 26E35, 54A05, 54J05.
Mots clés : espace métrique, déformation topologique, changement d'échelle, analyse non standard.

2000/04

Déformation topologique par changement d'échelle

Guy Wallet

avril 2000

Résumé : L'objet de ce travail est de proposer un formalisme mathématique permettant de définir et d'étudier systématiquement une notion de déformation topologique induite par les changements d'échelle dans les espaces métriques. On obtient ainsi un modèle pour les phénomènes de déformation topologique qui s'imposent lorsque l'on compare des données représentées dans des échelles différentes dans les systèmes d'informations géographiques et les bases de données spatio-temporelles.

Mots-clés : espace métrique, déformation topologique, changement d'échelle, analyse non standard.

Classification AMS : 03H05, 03H10, 26E35, 54A05, 54J05.

1 Introduction

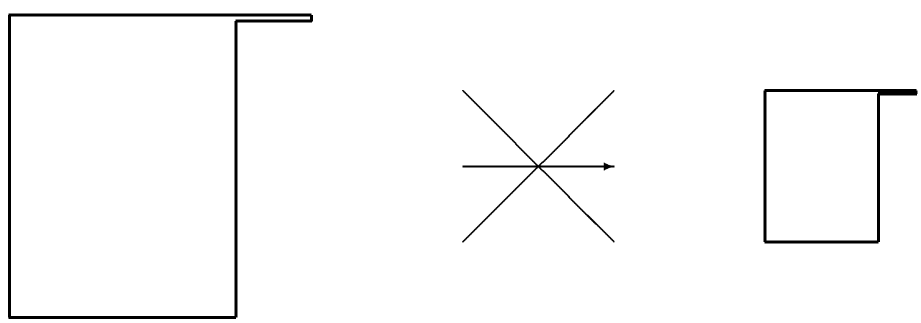
De nombreux travaux en informatique sur les systèmes d'informations géographiques (SIG) et plus généralement sur les bases de données spatio-temporelles utilisent des concepts mathématiques issus de la topologie pour définir des relations qualitatives entre des objets géométriques intervenant dans ce contexte. En général, l'espace topologique considéré dans ces travaux est le plan, plus généralement un espace affine et on peut aussi imaginer une sphère.

Dans ce cadre, la modélisation et l'utilisation de données spatio-temporelles à différentes échelles est un sujet de recherche important surtout dans le domaine de la cartographie [9, 1]. En effet, une notion quasi-empirique de changement d'échelle s'impose et il faut mettre en place des procédures permettant de prendre en compte les *déformations topologiques* qu'impliquent ces transformations. Généralement, les spécialistes des SIG sont dans l'obligation de constater que les mathématiques constituées n'offrent pas, au moins de manière immédiate, un modèle satisfaisant pour les changements d'échelle [4, 7]. En effet, pour représenter un changement d'échelle, disons dans un espace affine E, le concept mathématique naturel est celui d'une homothétie. Mais comme une homothétie de E est un homéomorphisme de E, c'est-à-dire une transformation qui laisse invariantes toutes les propriétés topologiques, cela ne peut pas constituer un bon modèle de la notion empirique de changement d'échelle qui, justement, se manifeste par des modifications apparentes de la topologie. C'est un paradoxe que les mathématiciens ont construit l'outil merveilleux de la topologie mais semblent ne pouvoir rien dire sur ces transformations qui affectent la topologie.

Bien entendu, les informaticiens qui travaillent dans ce domaine ne restent pas désarmés face à cette lacune. L'une des solutions qu'ils ont adoptée est de postuler qu'un changement d'échelle dans un espace E est une transformation de E non précisée, une sorte de boîte noire, dont on se contente de décrire certains effets sous la forme de contraintes empiriquement justifiées [6]. Ces dernières constituent en quelque sorte des axiomes permettant à nouveau de faire des raisonnements mathématiques prenant en compte maintenant les changements d'échelle ou plus exactement leurs conséquences.

C'est cette approche que l'on trouve dans les travaux de Jen [5] qui portent sur des objets spatiaux planaires qui sont des points, des courbes simples et des domaines bornés connexe dont la frontière est constituée par la réunion d'un nombre fini de courbes de Jordan. Il y est proposé trois contraintes principales régissant l'évolution des relations topologiques entre deux objets spatiaux A et B lorsque opère un changement d'échelle : *la contrainte intérieur-intérieur (C_1), la contrainte de connexité (C_2)et la contrainte extérieur-extérieur (C_3)* qui vont être énoncées plus loin. Ces contraintes sont proposées car elles ont un certain caractère d'évidence dans le monde empirique.

L'auteur fait une hypothèse supplémentaire pour que ses contraintes aient du sens : les régions du plan et les changements d'échelle considérés sont tels que le type topologique de chacune des régions en question n'est pas affecté par les changements d'échelles, ces derniers déformant seulement les relations topologiques qui existent entre elles. Difficilement formalisable en l'absence d'une notion mathématique de changement d'échelle, cette dernière condition est illustrée par un schéma du type suivant.

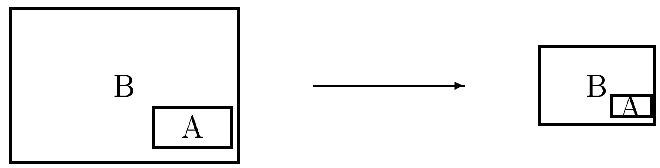


Le passage d'une grande échelle (dessin de gauche) à une petite échelle (dessin de droite) ne doit pas modifier la "topologie apparente" de l'objet géométrique considéré.

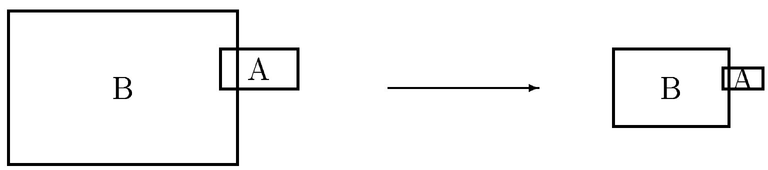
Un point de vocabulaire : lorsqu'ils s'appliquent aux échelles, les adjectifs "grand" et "petit" ont une valeur relative (une échelle n'est grande ou petite que par rapport à une autre) et s'appliquent au rapport qui mesure l'échelle (pour des cartes géographiques habituelles, l'échelle au 1/25 000 est une grande échelle relativement à l'échelle au 1/100 000 qui elle, est donc qualifiée de petite).

Dans la description de l'hypothèse précédente comme dans celle des contraintes, il faut concevoir que les illustrations graphiques constituent une partie intégrante de l'énoncé puisqu'elles complètent par l'évidence visuelle une signification qui ne semble pas pouvoir être précisée mathématiquement.

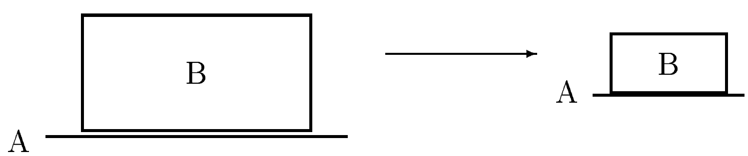
(C_1) Si $A \subset B$ dans une grande échelle, alors $A \subset B$ dans une petite échelle.



(C_2) Si $A \cap B \neq \emptyset$ dans une grande échelle, alors $A \cap B \neq \emptyset$ dans une petite échelle.



(C_3) B^{int} désignant l'intérieur topologique de B en tant que partie du plan affine E, si $A \cap B^{\text{int}} = \emptyset$ dans une grande échelle, alors $A \cap B^{\text{int}} = \emptyset$ dans une petite échelle.



Ces contraintes principales peuvent paraître redondantes mais rien ne permet de l'affirmer en l'absence d'une définition précise du type de transformation qu'est un changement d'échelle. Par ailleurs, Jen donne d'autres contraintes dites secondaires plus ou moins liées aux contraintes principales et s'appliquant à des objets spatiaux particuliers.

Faut-il en rester à la constatation que les changements d'échelle ne sont pas du ressort des mathématiques ? Est-ce une saine conception des mathématiques, conforme à l'histoire de son développement et de son interaction avec les autres disciplines, que de considérer que cette science a un champ d'objets spécifiques que les autres scientifiques peuvent utiliser à condition que l'objet dont ils ont besoin "existe au catalogue" ?

L'objet du présent travail est de proposer une modélisation mathématique des changements d'échelle. Bien qu'ayant un statut formel inhabituel, les concepts correspondants sont relativement simples et ils sont construits directement de manière à représenter le phénomène empirique en question. L'efficacité de cette modélisation est vérifiée par le fait qu'elle permet de justifier les contraintes principales de Jen dans un cadre plus général (on pourrait faire de même pour les contraintes secondaires) en donnant un sens précis à toutes les hypothèses et en supprimant celles qui sont inutiles. Outre la justification qu'elle apporte à des affirmations d'origine empirique, l'intérêt de cette étude pourrait être de définir un cadre mathématique général permettant une étude systématique des déformations topologiques induites par des changements d'échelle. Elle s'adresse donc tout autant à l'informaticien spécialiste des bases de données spatio-temporelles qu'au mathématicien topologue et géomètre.

Une première partie définit le "truc" formel qui permet de passer outre l'impossibilité de définir mathématiquement les changements d'échelle : une construction syntaxique non standard évitant autant que possible l'introduction de principes transcendants afin que le cadre soit clairement adapté au problème posé. Cela étant fait, il est possible de définir la famille des changements d'échelle sur un espace métrique E comme une déformation $(=_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}$ de la relation l'égalité sur E. On étudie ensuite les conséquences de ce point de vue relativement aux opérations ensemblistes usuelles (appartenance, inclusion, égalité des sous-ensembles, intersection). Enfin, on aborde le cœur de ce travail qui concerne les conséquences topologiques des changements d'échelle avec l'introduction de notions, adaptées à une échelle donnée α, d'intérieur (le α-intérieur), de bord (le α-bord) et d'extérieur (le α-bord). On peut alors mettre en place le concept de représentant régulier : une partie A de E admet une partie B de E pour représentant régulier à l'échelle α lorsque l'intérieur, le bord et l'extérieur de B (pour la topologie "absolue" de E), sont indiscernables du α-intérieur, du α-bord et du α-extérieur de A. Ce concept est central dans cette étude mais aussi naturel car l'effet déformant d'un changement d'échelle se traduit par l'apparition d'un nouveau représentant régulier. C'est aussi cette notion qui permet de clarifier l'hypothèse mystérieuse de Jen sur les changements d'échelle n'affectant pas le type topologique d'une région donnée ; cela se traduit maintenant par l'invariance d'un représentant régulier. Enfin, dans une dernière partie, on étudie le problème de l'existence d'un représentant régulier. On a alors la mauvaise surprise de découvrir une partie de $\mathbb{R}_+$ qui n'admet pas de représentant régulier à l'échelle 1. Heureusement, ce résultat négatif est finalement contrebalancé par un théorème d'existence pour une partie de "taille limitée" dans un "bon" espace métrique. Relativement techniques, ces derniers développements nécessitent de renforcer le cadre formel dans lequel on s'est placé en introduisant un peu de transcendance, prix à payer pour l'obtention de résultats généraux d'existence.

2 Le cadre théorique de la modélisation

On peut analyser le phénomène de changement d'échelle dans un espace physique comme résultant de l'effet combiné d'une part d'une dilatation (ou contraction) sur la distance, d'autre part d'une limitation dans la possibilité de distinguer des points trop proches. C'est ce dernier aspect qui est problématique lorsque l'on se propose de définir un modèle mathématique des changements d'échelle dans un espace métrique. Puisque la proximité des points est mesurée par la distance, le problème se ramène aux nombres réels : existe-t-il un point de vue fondé mathématiquement permettant d'introduire une limitation dans la possibilité de distinguer deux nombres réels assez proches ? Ou encore, en se ramenant au voisinage de 0 : est-il possible de définir une classe de nombres réels non triviale, c'est-à-dire non réduite à $\{0\}$ et à $\mathbb{R}$, qui soit une représentation opératoire de ce que l'on pourrait appeler la classe des nombres négligeables ?

A ma connaissance, cela est possible seulement dans le cadre de l'Analyse non standard [12, 10, 3, 2]. Cette dernière se présente en général comme une construction très générale ayant pour but de rajouter au stock des "objets mathématiques" de nombreuses idéalités de tout type avec comme champ d'application potentiel l'ensemble des mathématiques constituées. Cette universalité de l'outil non standard a pour inconvénient l'intervention d'un formalisme qui est loin d'être naturel même s'il est aisé d'en faire l'apprentissage. De plus, l'auteur de ces lignes a pu vérifier que, prise comme telle, l'Analyse non standard la plus générale ne répondait pas immédiatement au problème posé par la modélisation des changement d'échelle[1], malgré la puissance formelle (pour ne pas dire magique) de certains de ses concepts comme ceux d'ombre ou de partie standard.

Le travail présenté ici ne se place pas dans le cadre prédéfini de l'une des versions très générales de l'analyse non standard. Cependant, on conserve l'idée fondamentale introduite et développée par E. Nelson [10] selon laquelle, puisque le langage mathématique usuel, c'est-à-dire en gros la théorie des ensembles, ne permet pas de définir simplement une échelle de grandeur, il suffit de *rajouter de manière conventionnelle et syntaxique cette possibilité*. Enfin, dans la lignée des travaux d'E. Nelson sur les probabilités "radicalement élémentaires"[11] et de certains travaux de R. Lutz [8], on désire que ce rajout soit minimal et colle au mieux à l'application envisagée.

3 Introduction d'une échelle de grandeur

Pratiquement, on introduit une nouvelle discrimination portant sur les nombres réels. On postule que les éléments de $\mathbb{R}$ sont de l'un et exclusivement de l'un des trois types suivants : les nombres *négligeables*, les nombres *appréciables* et les nombres *illimités*. On regroupe aussi la classe des nombres négligeables et celle des appréciables en une nouvelle classe : celle des nombres *limités* (par opposition à la classe des illimités). Cette classification des nombres réels n'étant pas définie dans le cadre de la théorie des ensembles, son utilisation et donc son sens sont régies par des nouvelles règles. Ces dernières se présentent sous la forme d'axiomes écrits de manière à ce que les trois classes précédentes constituent une représentation fidèle de ce que l'on entend dans le monde empirique par quantités négligeables, quantités appréciables et quantités illimités. La liste d'axiomes qui suit est un peu redondante mais ce caractère est voulu, de manière à ce que l'on dispose immédiatement de règles opératoires.

(A_1) Le nombre 0 est négligeable et le nombre 1 est appréciable.
(A_2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ non nul, x est illimité si et seulement si x^{-1} est négligeable.
(A_3) Si $x \in \mathbb{R}$ est négligeable, $y \in \mathbb{R}$ est appréciable et $z \in \mathbb{R}$ est illimité, alors

$$|x| < |y| < |z|$$

(A_4) La somme et le produit de deux nombres limités sont limités.

[1] Le spécialiste de topologie non standard peut établir un lien et simultanément constater une différence subtile entre ce qui est fait ici et la notion de S-topologie.

(A_5) La somme de deux nombres négligeables est négligeable et le produit d'un nombre négligeable et d'un nombre limité est négligeable.

(A_6) Il existe des nombres négligeables non nuls.

Il faut insister sur le fait que ces règles se rajoutent à toute les propriétés usuelles (axiomes ou théorèmes). Tout ce qui est vrai d'habitude continue à être vrai. On a simplement enrichi le langage par un apport syntaxique.

Afin de faire des calculs symboliques sur les ordres de grandeur, on note $\mathcal{N}$ un nombre réel négligeable non précisé, $\mathcal{A}$ un nombre réel appréciable non précisé, $\mathcal{L}$ un nombre limité non précisé et $\mathcal{I}$ un nombre réel illimité non précisé. De manière plus précise, les symboles $\mathcal{N}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{I}$ dénotent les prédicats "être négligeable", "être appréciable", "être limité" et "être illimité". Conséquence immédiate des axiomes, on obtient l'algèbre des ordres de grandeur

$$\begin{array}{lllll} \mathcal{N}+\mathcal{N}=\mathcal{N} & \mathcal{N}+\mathcal{A}=\mathcal{A} & \mathcal{N}+\mathcal{I}=\mathcal{I} & \mathcal{A}+\mathcal{A}=\mathcal{L} & \mathcal{A}+\mathcal{I}=\mathcal{I} \\ \mathcal{N}\times\mathcal{N}=\mathcal{N} & \mathcal{N}\times\mathcal{A}=\mathcal{N} & \mathcal{N}\times\mathcal{I}=? & \mathcal{A}\times\mathcal{A}=\mathcal{A} & \mathcal{A}\times\mathcal{I}=\mathcal{I} \end{array}$$

le point d'interrogation correspondant à un cas évident d'indétermination.

Il est commode d'introduire la relation binaire $\simeq$ sur les nombres réels définie par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad x\simeq y \iff |x-y| \text{ est négligeable}$$

On dit que x est indistinguable de y lorsque $x\simeq y$. Un nombre réel x est donc négligeable si et seulement s'il est indistinguable de 0, c'est-à-dire si $x\simeq 0$. La relation $\simeq$ est clairement une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ au sens où elle est réflexive, symétrique et transitive.

L'échelle de grandeur est constituée par l'introduction de la hiérarchie (négligeable, appréciable, illimité) des nombres réels qui peut se résumer d'ailleurs par les propriétés de la relation $\simeq$. On peut la qualifier d'universelle car, à partir d'elle, il est possible d'introduire des ordres de grandeur dans les structures construites à partir de l'ensemble $\mathbb{R}$.

Néanmoins il faut remarquer que $\simeq$ n'étant pas une notion interne à la théorie des ensembles, elle ne possède pas nécessairement les propriétés des relations ensemblistes. Par exemple, on peut être tenté d'identifier le prédicat $\mathcal{N}$ avec un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

$$\mathcal{N}=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ x\simeq 0\}$$

Le soi-disant ensemble $\mathcal{N}$ étant majoré par tout nombre appréciable positif, il devrait posséder une borne supérieure $\nu\in\mathbb{R}$. Cette dernière ne peut être ni négligeable (car 2ν serait aussi dans $\mathcal{N}$) ni appréciable (car alors $\nu/2$ serait aussi appréciable). Cette contradiction montre qu'il n'existe pas de tel ensemble $\mathcal{N}$; le prédicat "être négligeable" ne définit pas un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Loin d'être un handicap, cette limitation donne naissance à un nouveau procédé de démonstration aussi appelé le principe de permanence.

Principe de permanence. *Si un sous-ensemble X de $\mathbb{R}$ est telle que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ tel que $x\simeq 0$, on ait $x\in X$, alors X posséde un élément appréciable positif.*

En effet, la collection $Y=\{x\in\mathbb{R}_+\ ;\ [0,x]\subset X\}$ est un vrai ensemble, c'est-à-dire construit selon les règles de la théorie des ensembles et avec des ingrédients internes à la théorie des ensembles. En conséquence, l'ensemble Y ne peut pas coïncider avec le "non-ensemble" $\mathcal{N}$ bien qu'il "contienne" ce dernier. Cette dernière "inclusion" est donc stricte, d'où le résultat.

4 Changement d'échelle dans un espace métrique

On considère un espace métrique (E, d). La relation $\simeq$ introduite sur $\mathbb{R}$ donne naissance à une relation de même nature sur E notée $=_1$ définie par

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x =_1 y \Longleftrightarrow d(x, y) \simeq 0$$

Cette dernière est une sorte de vision de l'égalité sur E pour un observateur à l'échelle naturelle (disons à l'échelle 1 pour anticiper) dont le pouvoir de résolution ne permet pas de séparer des points trop proches.

Pour définir une notion de changement d'échelle sur E il faut associer deux types de transformations : d'une part une homothétie sur la distance (une dilatation ou une contraction), d'autre part cette égalité pour l'observateur qui rend indistincts des points trop proches. Cela est possible de manière élémentaire et naturelle en modifiant par un facteur multiplicatif la relation $=_1$ introduite précédemment. Cela permet de définir une notion d'égalité relative à une échelle.

DÝfinition 1. *Etant donné un nombre réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$*, l'égalité à l'échelle α *est la relation binaire $=_\alpha$ définie sur E par*

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x =_\alpha y \iff \alpha\, d(x, y) \simeq 0$$

Cette égalité à l'échelle α possède les propriétés de réflexivité, de symétrie et de transitivité qui en font formellement une relation d'équivalence sur E. De ce point de vue, l'espace quotient est une représentation de E à l'échelle choisie. Cependant, le caractère syntaxique de cette notion fait que ce type de considération purement ensembliste n'est pas entièrement fondé. Par exemple les classes d'équivalence ne sont pas en général des ensembles ce qui fait que l'ensemble quotient a un statut encore plus problématique. C'est pour éviter ces considérations délicates que l'on en reste au niveau syntaxique d'une relation $=_\alpha$ qui est une forme dégénérée de l'égalité.

En fait, il est intéressant de considérer la famille $(=_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*}$ comme une déformation de l'égalité usuelle. Plus α est grand et plus l'égalité $=_\alpha$ est fine au sens où elle permet de séparer des points de plus en plus proches

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (x \neq y) \Longrightarrow (\exists \alpha_0 \in \mathbb{R}_+^* \; \forall \alpha \geq \alpha_0 \quad x \neq_\alpha y)$$

En ce sens, la limite de $=_\alpha$, lorsque $\alpha \to +\infty$ est l'égalité usuelle, ce qui fait que l'on peut noter cette dernière $=_\infty$. A l'opposé, lorsque $\alpha \to 0$, on obtient à la limite la relation grossière $=_0$ qui confond tous les points.

On obtient ainsi un modèle mathématique des situations concrètes où des objets sont observables à diverses échelles dans un espace physique. Dans le modèle, les objets spatiaux que l'on veut observer sont représentés par les parties de E au sens de la théorie des ensembles. Les échelles sont les éléments de $\mathbb{R}_+^*$. L'observation à une échelle α se traduit par l'effet de l'égalité $=_\alpha$ qui déforme l'apparence de ces objets. Le changement d'échelle sur E, de l'échelle α à l'échelle β, consiste à passer de l'égalité $=_\alpha$ à l'égalité $=_\beta$. Plus le nombre α est grand et plus l'observation est fine au sens où elle fait apparaître de plus en plus de détails. La "limite lorsque α tend vers $+\infty$ de l'observation à l'échelle α" donne la structure exacte des objets sans déformation.

Formellement, le point de vue que l'on va développer consiste à interpréter les propriétés de la théorie des ensembles et de la topologie à l'aide de ces nouvelles égalités ainsi que les transformations de ces propriétés lorsque l'on fait un changement d'échelle.

5 Changement d'échelle et opérations ensemblistes

L'appartenance $\in$ est la relation basique sur laquelle est construite toute la théorie des ensembles. La remarque triviale selon laquelle

$$(x = y) \wedge (y \in A) \implies (x \in A)$$

suggère d'introduire une interprétation à l'échelle α de cette relation. On obtient ainsi une déformation de la relation d'appartenance. Cette dernière correspond à la manière dont un observateur placé à l'échelle α interprète la propriété d'appartenance.

DÝfinition 2. *Etant donné* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ l'appartenance à l'échelle α *(ou* l'α-appartenance*) est la relation binaire* $\in_\alpha$ *définie par*

$$\forall x \in E \; \forall A \subset E \; (x \in_\alpha A \iff \exists y \in A \; x =_\alpha y)$$

Lorsque $x \in_\alpha A$ on dit que x appartient à A à l'échelle α.

A partir de là, on définit une *relation d'inclusion $\subset_\alpha$ à l'échelle α (ou la α-inclusion)* pour les parties de E

$$\forall A \subset E \; \forall B \subset E \; (A \subset_\alpha B \iff \forall x \in E \; (x \in_\alpha A \implies x \in_\alpha B))$$

et une *égalité à l'échelle α* portant maintenant sur les parties de E

$$\forall A \subset E \; \forall B \subset E \; (A =_\alpha B \iff \forall x \in E \; (x \in_\alpha A \iff x \in_\alpha B))$$

qui est équivalente à l'inclusion réciproque à l'échelle α. L'assertion selon laquelle les ensembles A et B sont égaux à l'échelle α revient à dire que ces ensembles ont même apparence à cette échelle ; pour un observateur muni d'un pouvoir de résolution correspondant à l'échelle α, les ensembles A et B semblent égaux. On dit que B est confondu avec A à l'échelle α.

Il est clair que si A et B sont des parties de E telles que $A \subset B$ alors $A \subset_\alpha B$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Dans le cas général, on se propose d'établir des relations entre des propriétés d'inclusion à des échelles différentes. Si α et β sont des éléments de $\mathbb{R}_+^*$ tels que $\alpha \leq \beta$, on n'a pas en général d'implication

$$A \subset_\alpha B \implies A \subset_\beta B$$

Par exemple, si a et b sont des points distincts de E, il suffit de choisir α suffisamment petit de sorte que $\alpha\, d(a,b) \simeq 0$ et β suffisamment grand de sorte que $\beta\, d(a,b) \not\simeq 0$ pour que l'on ait $\{a\} \subset_\alpha \{b\}$ et $\{a\} \not\subset_\beta \{b\}$ alors que $\alpha \leq \beta$. C'est en passant des grandes aux petites échelles que l'on obtient une permanence de l'inclusion.

Proposition 1. *Soit α et β dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $\beta \leq \alpha$. Si A et B sont des partie de E, alors*

$$A \subset_\alpha B \implies A \subset_\beta B$$

Preuve. On vérifie que la propriété $A \subset_\gamma B$ est équivalente à

$$\forall a \in A\ \exists b \in B \quad \gamma\, d(a, b) \simeq 0$$

et il est clair que pour $\beta \leq \alpha$, on a

$$\alpha\, d(a, b) \simeq 0 \implies \beta\, d(a, b) \simeq 0 \quad \square$$

Cette proposition correspondant à la contrainte (C_1) de Jen. On obtient ainsi une justification mathématique de cette contrainte dans un contexte très général puisqu'elle s'applique à des parties arbitraires d'un espace métrique lui-même arbitraire.

Corollaire 1. *Soit α et β dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $\beta \leq \alpha$. Si A et B sont des partie de E, alors*

$$A =_\alpha B \implies A =_\beta B$$

Autrement dit, si B est confondu avec A à l'échelle α alors B est confondu avec A à toute échelle β telle que $\beta \leq \alpha$. *Pour connaître un objet A à une petite échelle, il suffit de connaître l'apparence de cet objet à une échelle plus grande ; en particulier, il n'est pas nécessaire de connaître l'objet lui-même.*

Dans le même ordre d'idée, on définit *l'intersection à l'échelle α* des parties A et B de E par

$$\forall x \in E\ (x \in_\alpha A \cap_\alpha B \iff (x \in_\alpha A) \wedge (x \in_\alpha B))$$

Le caractère syntaxique de cette notion fait que c'est la propriété $x \in_\alpha A \cap_\alpha B$ qui est ainsi globalement définie mais non pas une partie $A \cap_\alpha B$ de E (la classe des $x \in E$ tels que $x \in_\alpha A \cap_\alpha B$ n'a pas nécessairement le statut d'ensemble).

On dit que *l'intersection des parties A et B de E est non vide à l'échelle α* lorsque

$$\exists x \in E \quad (x \in_\alpha A) \wedge (x \in_\alpha B)$$

et on note cette propriété $A \cap_\alpha B \neq_\alpha \emptyset$ en se souvenant qu'il ne faut pas la lire comme une propriété portant sur des ensembles. Cette notion se comporte bien lorsque l'on passe d'une grande à une petite échelle.

Proposition 2. *Soit α et β dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $\beta \leq \alpha$. Si A et B sont des partie de E, alors*

$$A \cap_\alpha B \neq_\alpha \emptyset \implies A \cap_\beta B \neq_\beta \emptyset$$

Preuve. On vérifie que la propriété $A \cap_\alpha B \neq_\alpha \emptyset$ est équivalente à

$$\exists a \in A\ \exists b \in B \quad \alpha\, d(a, b) \simeq 0$$

d'où la conclusion. $\square$

On vient ainsi de justifier la contrainte (C_2) de Jen dans notre cadre.

Enfin, il faut noter que l'opération de passage au complémentaire présente une particularité troublante lorsqu'on l'observe à une échelle donnée : en général, l'intersection d'une partie et de son complémentaire semble non vide. De manière plus précise, si A est une partie de E, tout point x appartenant à la frontière topologique de A dans E vérifie $x \in_\alpha A \cap_\alpha (E \setminus A)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

6 Changement d'échelle et topologie

Afin d'homogénéiser les notations, on note A^{adh}, A^{int}, A^{ext} et A^{brd}, l'adhérence, l'intérieur, l'extérieur et le bord d'une partie A de E. On a donc $A^{\mathrm{brd}} = A^{\mathrm{adh}} \setminus A^{\mathrm{int}}$ et $A^{\mathrm{ext}} = E \setminus A^{\mathrm{adh}}$.

On se propose de mettre en place l'analogue de certains concepts topologiques prenant en compte l'effet déformant induit par le choix d'une échelle de grandeur. L'idée de base permettant de construire les déformations topologiques induites par un changement d'échelle est la suivante : une boule $B(x,r)$ est vue comme une boule à une certaine échelle α à condition que son rayon r ne soit pas trop petit (c'est-à-dire si $\alpha r \not\simeq 0$) ; sinon elle a l'apparence d'un point ($B(x,r) =_\alpha \{x\}$).

A nouveau, une petite difficulté réside en ce que les concepts décrivant les effets des changements d'échelle ne sont pas internes à la théorie des ensembles. Cela impose de définir des notions de type topologique qui s'appliquent à des propriétés et non pas, comme on en a l'habitude, à des ensembles.

DÝfinition 3. *Etant donnés $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in E$, une α-boule de centre x est une boule usuelle de E de centre x et de rayon $r > 0$*

$$B(x) = \{y \in E \ ; \ d(x,y) < r\}$$

dont le rayon r est tel que $\alpha\, r \not\simeq 0$

Une propriété P portant sur les points de E est dite ouverte à l'échelle α (ou α-ouverte) *lorsque, pour tout $x \in E$ tel que $P(x)$, il existe une α-boule $B(x)$ centrée en x telle que $B(x) \subset_\alpha P$, ce qui signifie*

$$\forall y \in E \ (y \in_\alpha B(x) \implies P(y))$$

Une propriété Q portant sur les points de E est α-fermée si sa négation $\neg Q$ est une propriété α-ouverte.

Etant donnée une partie non vide A de E, on peut considérer la propriété de α-appartenance à A (vérifiée par un point $x \in E$ lorsque $x \in_\alpha A$). C'est cette propriété qui traduit l'apparence de A à l'échelle α.

Proposition 3. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $A \subset E$, la propriété de α-appartenance à A est α-fermée.*

Preuve. C'est une conséquence du principe de permanence. Soit $x \in E$ tel que $x \notin_\alpha A$. Alors, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha\, r \simeq 0$, la boule $B(x,r)$ ne rencontre pas A. On remarque que la propriété d'appartenance à l'ensemble des $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(x,r) \cap A = \emptyset$ ne peut pas être équivalente à la propriété $\alpha\, r \simeq 0$. En effet, la classe des $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\alpha\, r \simeq 0$ ne peut pas être un ensemble. On en déduit qu'il existe $r > 0$ avec $\alpha\, r \not\simeq 0$ tel que $B(x,r) \cap A = \emptyset$ d'où

$$\forall y \in E \ (y \in_\alpha B(x, r/2) \implies y \notin_\alpha A)$$

ce qui montre que la propriété de α-appartenance à A est α-fermée. □

Autrement dit, une partie A de E est vue comme fermée à toute échelle (contrainte à mettre en rapport avec l'obligation de représenter le bord d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ que l'on veut dessiner, quitte à soustraire ce bord par une opération de la pensée). Dans le même ordre d'idée, on vérifie immédiatement que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a $A =_\alpha A^{\mathrm{adh}}$. On se propose maintenant d'introduire l'analogue des notions topologiques d'intérieur, d'extérieur et de bord.

DÝfinition 4. *Soit A une partie de E et une échelle $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.*
Un point x de E est α-intérieur à A *et on note $x \in_\alpha \mathrm{int}_\alpha(A)$ lorsqu'il existe une α-boule $B(x)$ centrée en x telle que $B(x) \subset_\alpha A$, c'est-à-dire*

$$\forall y \in E \ (y \in_\alpha B(x) \implies y \in_\alpha A)$$

Un point x de E est α-extérieur à A *et on note $x \in_\alpha \mathrm{ext}_\alpha(A)$ lorsqu'il existe une α-boule $B(x)$ centrée en x telle que $B(x) \cap_\alpha A = \emptyset$, c'est-à-dire*

$$\forall y \in E \ (y \in_\alpha B(x) \implies y \notin_\alpha A)$$

Un point x de E est α-bordant à A *et on note $x \in_\alpha \mathrm{brd}_\alpha(A)$ lorsqu'il n'est ni α-intérieur à A, ni α-extérieur à A.*

Donc, un point x de E est α-bordant à A si et seulement si, pour toute α-boule $B(x)$ centrée en x, on a

$$(\exists y \in_\alpha B(x) \ y \in_\alpha A) \wedge (\exists z \in_\alpha B(x) \ z \notin_\alpha A)$$

ou encore si on préfère

$$(B(x) \cap_\alpha A \neq_\alpha \emptyset) \wedge (B(x) \not\subset_\alpha A)$$

En fait, la collection des trois propriétés que l'on vient de définir constituent une sorte de partition de E : tout point de E satisfait une et une seule de ces propriétés.

Si on considère le cas où A désigne une boule $B(a, r)$, un point $x \in E$ est α-intérieur à A si et seulement si

$$(d(x, a) < r) \wedge (\alpha\, d(x, a) \not\simeq \alpha\, r)$$

et ce même point x est α-bordant à A si et seulement si

$$\alpha\, d(x, a) \simeq \alpha\, r$$

Etant donnée une partie A de E et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, tout sous-ensemble B de E tel que $A =_\alpha B$ est confondu avec A à cette échelle. Parmi toutes les parties de E confondues avec A à l'échelle α, certaines peuvent avoir des propriétés topologiques intrinsèques (c'est-à-dire en tant que partie de l'espace métrique E, indépendamment de toute considération d'échelle) qui sont très peu en rapport avec leur apparence topologique à l'échelle considérée. Par exemple, un réseau discret d'un espace affine E peut être un représentant de l'espace E lui-même à certaines échelles.

Parmi les ensembles confondus avec A à l'échelle α, on s'intéresse maintenant à ceux qui, sous réserve d'existence, ont des propriétés topologiques intrinsèques collant au mieux à l'apparence topologique de A à l'échelle considérée.

DÝfinition 5. *Soit une partie A de E et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Un* représentant régulier de A à l'échelle α *est une partie B de E telle que, pour tout $x \in E$*

- $x \in_\alpha \mathrm{int}_\alpha(A) \iff (x \in B^{\mathrm{int}}) \wedge (x \notin_\alpha B^{\mathrm{brd}})$
- $x \in_\alpha \mathrm{ext}_\alpha(A) \iff (x \in B^{\mathrm{ext}}) \wedge (x \notin_\alpha B^{\mathrm{brd}})$
- $x \in_\alpha \mathrm{brd}_\alpha(A) \iff (x \in_\alpha B^{\mathrm{brd}})$

On remarque que l'une quelconque des trois conditions énoncées dans la définition découle des deux autres. De plus, il est clair que si B est un représentant régulier de A à l'échelle α, alors $A =_\alpha B$. L'idée que traduit cette définition est la suivante : à l'échelle considérée, les propriétés topologiques apparentes de A comme partie de E s'obtiennent à partir des propriétés topologiques intrinsèques de B comme partie de E par la déformation régulière qui consiste simplement à épaissir le bord de B.

Il est clair qu'une partie de E réduite à un point admet elle-même pour représentant régulier à toute échelle. Toute boule $B(a, r)$ admet elle-même pour représentant régulier à toute échelle ; de plus, si α est une échelle telle que $\alpha\, r \simeq 0$, alors elle admet aussi $\{a\}$ pour représentant régulier à l'échelle α. On voit ainsi que l'un des effets déformants induits par un changement d'échelle est l'éventuelle apparition d'un nouveau représentant régulier. Il ne peut donc pas y avoir d'unicité du réprésentant régulier. De manière générale, une petite modification d'un représentant régulier au voisinage de son bord ne modifie pas sa qualité de représentant régulier. Remarquons enfin qu'une partie bornée de E admet un singleton pour représentant régulier à toute échelle suffisamment petite.

DÝfinition 6. *Soit α et β des échelles telles que $0 < \beta \leq \alpha$. Une partie A de E est* topologiquement régulière de l'échelle α à l'échelle β *lorsqu'il existe une partie M de E qui est un représentant régulier de A à la fois dans l'échelle α et dans l'échelle β.*

Etant données des parties A et B de E et une échelle α, on note $A \cap_\alpha \mathrm{int}_\alpha(B) =_\alpha \emptyset$ la propriété

$$\forall x \in E \ (x \in_\alpha A \Longrightarrow x \notin_\alpha \mathrm{int}_\alpha(B))$$

Proposition 4. *On considère des parties A et B de E et des nombres réels α et β tels que $0 < \beta \leq \alpha$. On suppose que B est topologiquement régulier de l'échelle α à l'échelle β. Si $A \cap_\alpha \mathrm{int}_\alpha(B) =_\alpha \emptyset$ alors $A \cap_\beta \mathrm{int}_\beta(B) =_\beta \emptyset$.*

Sans l'hypothèse sur l'existence d'un même représentant régulier de B aux deux échelles, ce résultat est manifestement faux (penser au cas où B est un réseau dont le "pas" est négligeable à l'échelle β mais non négligeable à l'échelle α et où A est réduit à un point du réseau).

Cette proposition est l'analogue de la contrainte (C_3) de Jen. De plus, on a maintenant une hypothèse complètement formalisée qui joue le rôle de celle de Jen sur le fait que le changement d'échelle en question n'affecte pas le type des objets spatiaux considérés : c'est la propriété de régularité topologique. On remarque que cette dernière est plus faible que celle suggérée par Jen puisque maintenant on s'autorise une déformation topologique du genre de celle qui était exclue par le premier schéma. Enfin, on précise le cadre dans lequel l'ensemble des contraintes de Jen sont vraies puisque cette propriété de régularité n'est nécessaire que pour la contrainte (C_3) et qu'elle ne porte que sur l'ensemble B.

Preuve de la proposition. On va montrer que s'il existe $x \in_\beta A$ tel que $x \in_\beta \mathrm{int}_\beta(B)$, alors on a aussi $x \in_\alpha \mathrm{int}_\alpha(B)$.

Soit $x \in_\beta A$ tel que $x \in_\beta \mathrm{int}_\beta(B)$ et M un représentant régulier de B aux échelles α est β. On en déduit que $x \in M^{\mathrm{int}}$ et $x \notin_\beta M^{\mathrm{brd}}$. Puisque la condition $x \notin_\beta M^{\mathrm{brd}}$ est équivalente à $\beta\, d(x, M^{\mathrm{brd}}) \not\simeq 0$, il vient que $\alpha\, d(x, M^{\mathrm{brd}}) \not\simeq 0$ et donc que $x \notin_\alpha M^{\mathrm{brd}}$. Puisque $x \in M^{\mathrm{int}}$, on obtient que $x \in_\alpha \mathrm{int}_\alpha(B)$. □

7 Sur l'existence des représentants réguliers

La définition d'un représentant régulier d'une partie A de E à une échelle α donnée est l'élaboration mathématique de l'idée suivante : l'objet que l'on voit en observant A à l'échelle α est un représentant régulier de A à cette échelle. Etant donné que "l'on voit toujours quelque chose", il est naturel de se poser la question de l'existence.

Est-il vrai que toute partie d'un espace métrique E admet un représentant régulier à toute échelle ?

7.1 Un contre-exemple

Curieusement la réponse est négative. Pour le prouver, on va exhiber un ensemble n'admettant pas de représentant régulier à une certaine échelle. Cette ensemble est défini comme l'ensemble des valeurs d'une suite de nombres réels telle que la distance entre deux points consécutifs passe graduellement des nombres négligeables aux nombres appréciables de l'ordre de 1.

ThÝorÜme 1. *On se place dans l'espace métrique $E = \mathbb{R}_+$ et on considère la partie $X = \{x_0, \ldots, x_N\}$ de E, définie par $x_0 = 0$ et $x_{k+1} = x_k + \frac{k+1}{N}$ pour $k = 0, \ldots, N-1$ où N désigne un nombre entier naturel illimité. Alors, X n'admet pas de représentant topologique à l'échelle 1 dans E.*

Preuve. Pour chaque k on a $x_k = \frac{k(k+1)}{2N}$; il en découle que x_k est de l'ordre de $\frac{k^2}{N}$, c'est-à-dire diffère de ce dernier par une constante multiplicative appréciable. En particulier le point $x_N = \frac{N+1}{2}$ est non limité.

Etant donné un nombre $x \in [0, \frac{N+1}{2}]$, soit p l'unique nombre entier tel que $x_p \leq x < x_{p+1}$. Alors, $\frac{x}{N} \simeq 0$ si et seulement si $\frac{p}{N} \simeq 0$.

Si $\frac{x}{N} \simeq 0$, alors on a trivialement $\frac{x+1}{N} \simeq 0$ d'où il découle que tous les x_k compris entre x et $x+1$ vérifie $x_{k+1} - x_k \simeq 0$.

Si au contraire $\frac{x}{N} \not\simeq 0$, alors x_{p-1}, x_p et x_{p+1} sont à distance non négligeable les uns des autres.

Il en découle la description suivante des propriétés d'appartenance à $\mathrm{int}_1(X)$ et $\mathrm{brd}_1(X)$

$$x \in_1 \mathrm{int}_1(X) \Longleftrightarrow \left(\frac{x}{N} \simeq 0\right)$$
$$x \in_1 \mathrm{brd}_1(X) \Longleftrightarrow \left(\left(\exists k \in \{0, \ldots, N\} \ \left(\frac{k}{N} \not\simeq 0\right)\right) \wedge \left(x \simeq \frac{k(k+1)}{2N}\right)\right)$$

Par l'absurde, on suppose que X admet un représentant topologique M à l'échelle 1. Il en découle que M posséde une composante connexe C contenant les nombres réels positifs x

tels que $\frac{x}{N} \simeq 0$ de sorte que C soit majorée par tout $x_k = \frac{k(k+1)}{2N}$ avec $\frac{k}{N} \not\simeq 0$. L'ensemble C possède alors une borne supérieure c qui appartient au bord de M. On en déduit que $c \in_1 \mathrm{brd}_1(X)$, ce qui est impossible d'après la description de la propriété d'appartenance à $\mathrm{brd}_1(X)$. Ainsi, l'ensemble X ne possède pas de représentant régulier à l'échelle 1. $\square$

On remarque que cet ensemble X a un diamètre $\delta(X) = x_N - x_0$ qui est illimité. On peut donc espérer que ce résultat négatif relatif à l'existence d'un représentant régulier puisse être tempéré par une propriété d'existence pour des ensembles de "taille raisonnable" dans des "espaces raisonnables". C'est le sens des développements suivants.

7.2 Voisinages tubulaires métriques et représentants réguliers

Dans toute ce sous-paragraphe, on suppose que l'espace métrique E est tel que toute boule ouverte soit connexe. La propriété essentielle d'un espace métrique E possédant cette propriété est la suivante : si une boule $B(x,r)$ de E rencontre une partie C de E et son complémentaire $E \setminus C$, alors $B(x,r)$ rencontre C^{brd}.

On peut remarquer qu'un tel espace métrique est connexe et localement connexe. On obtient des exemples d'espaces métriques de ce type en considérant le cas des espaces affines munis d'une distance provenant d'une norme définie sur l'espace vectoriel associé.

On commence par mettre en place une condition générale permettant d'assurer l'existence d'un représentant régulier d'une partie A de E à une échelle donnée.

Etant données A et B des parties de E, on note $\mathrm{int}_\alpha(A) \subset B$ la propriété

$$\forall x \in E \, (x \in_\alpha \mathrm{int}_\alpha(A) \implies x \in B)$$

Proposition 5. *On considère des parties A et B de E et un nombre réel strictement positif α. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*
(1) B est représentant régulier de A à l'échelle α ;
(2) $A =_\alpha B$ et $int_\alpha(A) \subset B$.

Preuve de la proposition. Il est clair que (1) implique (2). Réciproquement, on suppose que $A =_\alpha B$ et $\mathrm{int}_\alpha(A) \subset B$.

Si $x \in_\alpha \mathrm{int}_\alpha(A)$, alors il existe une α-boule centrée en x dont tous les points sont dans B ; il en découle que $(x \in B^{\mathrm{int}}) \wedge (x \notin_\alpha B^{\mathrm{brd}})$.

Si $(x \in B^{\mathrm{int}}) \wedge (x \notin_\alpha B^{\mathrm{brd}})$, toute boule $B(x,r)$ avec $\alpha\, r \simeq 0$ ne rencontre pas B^{ext} car sinon elle rencontrerait B^{brd} ; une telle boule est donc incluse dans B. Par permanence, il existe une α-boule centrée en x incluse dans B, ce qui montre que $x \in_\alpha \mathrm{int}_\alpha(A)$.

Si $x \in_\alpha \mathrm{brd}_\alpha(A)$, toute boule $B(x,r)$ avec $\alpha\, r \not\simeq 0$ contient un point α-intérieur à A et un point α-extérieur à A ; elle contient donc aussi un point de B^{int} et un point de B^{ext}. Par permanence, il existe une boule $B(x,r)$ avec $\alpha\, r \simeq 0$ qui rencontre B^{int} et B^{ext}. Cette dernière rencontre donc B^{brd}, ce qui montre que $x \in_\alpha B^{\mathrm{brd}}$.

Si $x \in_\alpha B^{\mathrm{brd}}$, il existe un point y de B^{brd} tel que $x =_\alpha y$. Donc toute boule $B(x,r)$ avec $\alpha\, r \not\simeq 0$ est telle que $B(x, r/2)$ soit un voisinage de y ; en conséquence, cette dernière boule rencontre B et B^{ext}. Comme $A =_\alpha B$, on voit qu'il existe $z \in_\alpha B(x,r)$ tel que $z \in_\alpha A$.

Il reste à montrer qu'il existe $t \in_\alpha B(x,r)$ tel que $t \notin_\alpha A$. Par l'absurde, on suppose que pour tout $t \in_\alpha B(x,r)$ on a $t \in_\alpha A$; on en déduit que tout point de $B(x,r/2)$ est α-intérieur à A, ce qui est impossible car $B(x,r/2) \cap B^{\mathrm{ext}} \neq \emptyset$. On vient de montrer que $x \in_\alpha \mathrm{brd}_\alpha(A)$.

□

Pour construire un représentant régulier de A, une idée naturelle est de grossir les points de A en les remplaçant par des boules de rayon négligeables à l'échelle donnée.

Cela amène à introduire les voisinages tubulaires métriques de A : étant donné un nombre réel positif ρ, on note $V_\rho(A)$ le ρ-voisinage de A, c'est-à-dire

$$V_\rho(A) = \{x \in E \ ; \ \exists a \in A \ d(x,a) < \rho\} = \{x \in E \ ; \ d(x,A) < \rho\}$$

Le résultat suivant décrit la propriété d'existence des représentants topologique en termes de voisinages tubulaires métriques.

Proposition 6. *Etant données une partie A de E et une échelle $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *A possède un représentant régulier à l'échelle α.*
2. *Il existe un nombre $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\alpha\varepsilon \simeq 0$ tel que $\mathrm{int}_\alpha(A) \subset V_\varepsilon(A)$.*
3. *Il existe un nombre $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\alpha\varepsilon \simeq 0$ tel que $V_\varepsilon(A)$ soit un représentant régulier de A à l'échelle α.*

De plus, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\alpha\varepsilon \simeq 0$, la propriété $\mathrm{int}_\alpha(A) \subset_\alpha V_\varepsilon(A)$ est une condition nécessaire et suffisante pour que $V_\varepsilon(A)$ soit un représentant régulier de A à l'échelle α.

Preuve. D'après ce qui précède, il suffit de vérifier que La condition 1 implique la condition 2.

Si A admet un représentant régulier B à l'échelle α, pour tout $x \in B$ on a $\alpha d(x,A) \simeq 0$. L'ensemble de nombres réels $\{d(x,A) \, ; \, x \in B\}$ est borné et non vide. Il possède donc une borne supérieure $\eta > 0$ qui nécessairement vérifie $\alpha\eta \simeq 0$. En posant $\varepsilon = 2\eta$, on voit que $B \subset V_\varepsilon(A)$ d'où le résultat puisque $\mathrm{int}_\alpha(A) \subset B$ et $A =_\alpha V_\varepsilon(A)$.

□

Que se passe-t-il lorsque les hypothèses du théorème précédent ne sont pas vérifiées ? Que peut-on en déduire quant à la structure de A et de E ?

Pour répondre à ces questions, il faut se lancer dans une investigation qui nécessite, comme le montrera la fin de cette étude, de manipuler et de construire des suites dans E. Cela est dans l'ordre des choses car on sait que, particulièrement dans le domaine de la topologie métrique, les suites de points sont des outils adaptés, et on est fréquemment amené à en construire par récurrence. Légitimes dans le cadre de la théorie des ensembles, les techniques utilisant des formes de récurrence ne peuvent pas s'appliquer immédiatement à des propriétés utilisant les échelles de grandeur.

7.3 Récurrence et ordres de grandeur

Voici un exemple mettant en évidence la particularité des ordres de grandeur vis à vis de la récurrence. Etant donné un nombre réel $\varepsilon > 0$ négligeable, il est clair que $2\varepsilon = \varepsilon + \varepsilon$ est négligeable, que $3\varepsilon = 2\varepsilon + \varepsilon$ est négligeable, etc. Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}$ vérifie $n\varepsilon \simeq 0$, alors $(n+1)\varepsilon \simeq 0$. Pourtant, d'après le principe d'Archimède (valable pour tous les nombres réels strictement positifs, donc en particulier pour ε) il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N\varepsilon \geq 1$, ce qui fait que $N\varepsilon$ n'est plus négligeable. On voit ainsi que le principe de récurrence ne s'applique pas nécessairement aux propriétés construites à partir de l'échelle de grandeur. Un petit peu de réflexion sur l'utilisation des ordres de grandeur dans le monde physique montre que cette nouvelle contrainte est relativement naturelle : s'il est clair que la somme de deux quantités négligeables est négligeable, il est aussi admis (principe de l'épargne) que la somme d'un très grand nombre de quantités négligeables peut être appréciable. Il faut donc concevoir que ce type de propriété n'est pas de l'ordre d'un paradoxe mais que, au contraire, il participe à l'explicitation de la structure logique incontournable d'un point de vue cohérent sur les ordres de grandeur.

S'il n'est pas possible en général d'utiliser le raisonnement par récurrence pour les propriétés construites à partir des ordres de grandeur, il semble néanmoins indispensable de se doter d'outils théoriques cohérents et adaptés à ces nouvelles propriétés afin de pouvoir manipuler et construire des suites.

Le résultat suivant constitue une nouvelle version du principe de permanence portant sur des suites de nombres réels, version plus connue sous le nom de lemme de Robinson.

Lemme 1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que, pour tout nombre limité $n \in \mathbb{N}$, on ait $x_n \simeq 0$. Alors*
(1) il existe un nombre illimité $\nu \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \simeq 0$ pour tout $n \leq \nu$;
(2) il existe un nombre négligeable ε tel que $|x_n| \leq \varepsilon$ pour tout nombre limité $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On considère l'ensemble Y des $n \in \mathbb{N}$ tels que $x_k \leq 1/k$ pour tout k vérifiant $0 < k \leq n$. Cet ensemble contient la "collection" $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ des nombres $n \in \mathbb{N}$ qui sont limités. Puisque $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ est borné non vide mais ne peut pas posséder de plus grand élément, ce n'est pas un objet de la théorie des ensembles. L'inclusion de $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ dans Y est donc stricte, ce qui achève la preuve du premier point. On termine en prenant pour ε le plus grand des $|x_n|$ pour $0 \leq n \leq \nu$. □

En ce qui concerne les procédés de construction par récurrence, l'énoncé suivant constitue un outil performant adapté aux propriétés utilisant les ordres de grandeur.

Principe de construction par récurrence limitée. *Soit $\mathcal{P}(n,x)$ une propriété et un ensemble X tels que*

1. *il existe $x \in X$ tel que $\mathcal{P}(0,x)$;*
2. *pour tout nombre limité $n \in \mathbb{N}$, s'il existe une suite $(x_k)_{0\leq k\leq n}$ dans X telle que $\mathcal{P}(k,x_k)$ pour chaque $k = 0,\dots,n$, alors il existe $x_{n+1} \in X$ tel que $\mathcal{P}(k,x_k)$ pour chaque $k = 0,\dots,n+1$.*

Alors, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X telle que $\mathcal{P}(n,x_n)$ pour chaque nombre entier n limité.

On remarque d'abord que, hormis l'existence, ce principe ne dit rien sur les propriétés des points x_n dont l'indice n est illimité.

Ensuite, il faut savoir que le principe de construction par récurrence limitée ne découle pas des axiomes (A_1,...,A_6). En fait, il constitue une nouvelle règle qu'il faut rajouter aux précédentes si on veut pouvoir l'utiliser. On remarque que ce principe a un caractère quelque peu "transcendant" qui l'oppose à l'aspect naturel des règles précédentes. A partir de maintenant, on rajoute le principe de construction par récurrence limitée aux règles (A_1,...,A_6).

Une première conséquence de ce principe est que la propriété d'être limitée est préservée par exponentiation : si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ sont limités, alors x^n est limité ; ou encore, si on préfère, $\exp(x)$ est limité pour tout $x \in \mathbb{R}$ limité. Contrairement aux apparences, cela ne découle pas des règles (A_1,...,A_6).

7.4 Un résultat d'existence des représentants réguliers

A nouveau, on suppose dans toute ce sous-paragraphe que l'espace métrique E est tel que toute boule ouverte soit connexe.

On sait que l'existence d'un nombre $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\alpha\boldsymbol{\varepsilon} \simeq 0$ tel que $\mathrm{int}_\alpha(A) \subset V_{\boldsymbol{\varepsilon}}(A)$ est une condition nécessaire et suffisante pour que A possède un représentant régulier à l'échelle α. La négation de cette condition notée $\mathrm{int}_\alpha(A) \not\subset V_{\boldsymbol{\varepsilon}}(A)$ signifie

$$\exists x \ (x \in_\alpha \mathrm{int}_\alpha(A)) \wedge (x \notin V_{\boldsymbol{\varepsilon}}(A))$$

Lemme 2. *On considère une partie A de E et une échelle $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\alpha\boldsymbol{\varepsilon} \simeq 0$, on ait $\mathrm{int}_\alpha(A) \not\subset V_{\boldsymbol{\varepsilon}}(A)$.*

Alors, il existe un nombre appréciable $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E telle que
– pour tout $n \in \mathbb{N}$ limité, $\alpha\, d(x_n, A) \simeq 0$;
– pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ limités et distincts, $\alpha\, d(x_n, x_m) \geq \rho$.

Preuve. Pour simplifier les écritures, on suppose que α est égal à 1.

D'après les hypothèses, pour tout nombre réel strictement positif $\boldsymbol{\varepsilon} \simeq 0$, il existe un nombre limité $k \in \mathbb{N}$ non nul tel que

$$\exists x \in E \quad (d(x, A) \geq \boldsymbol{\varepsilon}) \wedge (\forall y \in B(x, 1/k) \ d(y, A) \simeq 0)$$

(i) Dans un premier temps, on se propose de démontrer que l'on peut inverser les deux premiers quantificateurs, c'est-à-dire, qu'il existe un nombre limité $k \in \mathbb{N}$ non nul tel que pour tout nombre réel strictement positif $\boldsymbol{\varepsilon} \simeq 0$, la même propriété soit vraie.

Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant que, pour tout nombre limité $k \in \mathbb{N}$ non nul, il existe un nombre réel strictement positif $\boldsymbol{\varepsilon} \simeq 0$ tel que

$$\forall x \in E \quad (d(x, A) \geq \boldsymbol{\varepsilon}) \Longrightarrow (\exists y \in B(x, 1/k) \ d(y, A) \not\simeq 0)$$

On choisit arbitrairement un nombre réel strictement positif $\varepsilon_0 \simeq 0$. D'après l'hypothèse initiale, il existe un nombre limité $k_0 \in \mathbb{N}$ non nul et un point x_0 de E tel que

$$(d(x_0, A) \geq \varepsilon_0) \wedge (\forall y \in B(x_0, 1/k_0)\ d(y, A) \simeq 0)$$

Au nombre k_0 on peut associer un nombre réel strictement positif $\varepsilon_1 \simeq 0$ tel que

$$\forall x \in E \quad (d(x, A) \geq \varepsilon_1) \Longrightarrow (\exists y \in B(x, 1/k_0)\ d(y, A) \not\simeq 0)$$

La comparaison des deux dernières propriétés montre que $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$. Au nombre ε_1 on peut associer un nombre limité $k_1 \in \mathbb{N}$ non nul et un point x_1 de E tels que

$$(d(x_1, A) \geq \varepsilon_1) \wedge (\forall y \in B(x_1, 1/k_1)\ d(y, A) \simeq 0)$$

et on remarque que nécessairement, $k_0 < k_1$.

En utilisant le principe de construction par récurrence limitée, on construit une suite de nombres réels $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de nombres entiers naturels $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E telles que, pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$ limité

- le nombre ε_n est négligeable et $0 < \varepsilon_n < \varepsilon_{n+1}$;
- le nombre k_n est limité et $k_n < k_{n+1}$;
- $(d(x_n, A) \geq \varepsilon_n) \wedge (\forall y \in B(x_n, 1/k_n)\ d(y, A) \simeq 0)$
- $\forall x \in E \quad (d(x, A) \geq \varepsilon_{n+1}) \Longrightarrow (\exists y \in B(x, 1/k_n)\ d(y, A) \not\simeq 0)$

D'après le lemme de Robinson, il existe un nombre réel positif négligeable ε tel que $\varepsilon_n < \varepsilon$ pour tout nombre n limité. A ce nombre ε on peut associer un nombre entier limité k non nul tel que

$$\exists z \in E \quad (d(z, A) \geq \varepsilon) \wedge (\forall y \in B(z, 1/k)\ d(y, A) \simeq 0)$$

De même, on montre que la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante jusqu'à un indice illimité μ. On en déduit que k_p est illimité pour chaque nombre illimité p vérifiant $p \leq \mu$. En conséquence, il existe un nombre limité n tel que $k_n \leq k < k_{n+1}$. Il vient que $B(z, 1/k_{n+1}) \subset B(z, 1/k)$ et $d(z, A) \geq \varepsilon_{n+2}$ d'où l'existence de $y \in B(z, 1/k)$ tel que $d(y, A) \not\simeq 0$, ce qui est contradictoire avec la propriété initiale de k.

(ii) Au terme du développement précédent, on est assuré de l'existence d'un nombre réel appréciable positif ρ tel que, pour tout nombre réel strictement positif $\varepsilon \simeq 0$

$$\exists x \in E \quad (d(x, A) \geq \varepsilon) \wedge (\forall y \in B(x, \rho)\ d(y, A) \simeq 0)$$

On choisit un nombre réel strictement positif ε_0 auquel on peut associer un point x_0 de E tel que

$$(d(x_0, A) \geq \varepsilon_0) \wedge (\forall y \in B(x_0, \rho)\ d(y, A) \simeq 0)$$

On définit un nouveau nombre réel strictement positif négligeable

$$\varepsilon_1 = 2\,\mathrm{Max}(\varepsilon_0, \sup\{d(y, A); y \in B(x_0, \rho)\})$$

auquel on associe un point x_1 de E tel que

$$(d(x_1, A) \geq \varepsilon_1) \wedge (\forall y \in B(x_1, \rho)\ d(y, A) \simeq 0)$$

On en déduit que x_1 n'appartient pas à la boule $B(x_0, \rho)$.

Poursuivant par l'introduction de

$$\varepsilon_2 = 2\,\mathrm{Max}(\varepsilon_1, \sup\{d(y, A); y \in B(x_1, \rho)\})$$

on construit ainsi par récurrence limitée une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E telle que $d(x_n, A) \simeq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ limité et $d(x_n, x_m) \geq \rho$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ limités. □

Afin de pouvoir formuler agréablement un théorème général d'existence des représentants réguliers, on introduit maintenant un peu de vocabulaire.

DÝfinition 7. *Soit une échelle $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.*

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est à diffusion α-limitée *lorsque $\alpha\, d(x_n, x_m)$ est limité pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ limités.*

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E présente des α-accumulations *lorsque, pour tout nombre appréciable $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ il existe des nombres entiers limités m et n tels que $\alpha\, d(x_n, x_m) < \rho$.*

Une partie A de E est α-bornée *lorsque A est bornée et que son diamètre $\delta(A)$ est tel que $\alpha\, \delta(A)$ soit limité.*

Corollaire 2. *Soit une échelle $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ telle que, dans l'espace métrique E, toute suite à diffusion α-limitée présente des α-accumulations. Alors, toute partie α-bornée de E possède un représentant régulier à l'échelle α.*

Preuve. Soit A une partie α-bornée de E. D'après le théorème précédent, il existe un nombre réel strictement positif vérifiant $\alpha\varepsilon \simeq 0$ tel que tout point du α-intérieur de A soit dans $V_\varepsilon(A)$. Cela prouve que A possède un représentant régulier à l'échelle α, ce dernier pouvant être $V_\varepsilon(A)$. □

Le caractère général et abstrait du résultat précédent ainsi que sa formulation en termes d'ordre de grandeur ne donnent pas immédiatement une information claire sur ce qui se passe dans des espaces métriques "naturels". En particulier, ce n'est pas encore un outil pour les changements d'échelles dans les espaces habituels des systèmes d'information géographiques.

Les hypothèses faites dans ce corollaire sur l'espace E évoquent une sorte de propriété de locale compacité à l'échelle α. On pourrait pousser plus loin cette analogie mais il est plus simple d'exploiter une propriété de volume localement limité des espaces usuels comme $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

ThÝorÜme 2. *Soit n un nombre entier limité et E un espace affine associé à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de la distance provenant de la structure euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$. Alors, pour toute échelle $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, toute partie de E qui est α-bornée possède un représentant régulier à l'échelle α.*

Preuve. Il suffit de montrer que toute suite à diffusion α-limitée dans E présente des α-accumulations. Par l'absurde, on suppose qu'il existe dans E une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et des nombres réels ρ et R strictement positifs appréciables tels que les boules $B(x_n, \rho/\alpha)$ pour n limité soient disjointes deux à deux et toutes incluses dans une certaine boule $B(a, R/\alpha)$.

Il existe une constante explicite K telle que, pour tout $x \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, la mesure de Lebesgue d'une boule $B(x,r)$ soit égale à Kr^n. On en déduit que pour tout N limité, la mesure de Lebesgue de $B(x_0, \rho/\alpha) \cup \cdots \cup B(x_{N-1}, \rho/\alpha)$ est égale à $NK(\rho/\alpha)^n$, d'ou l'inégalité $NK\rho^n \leq KR^n$. Le nombre R/ρ étant appréciable, une application du principe de construction par récurrence externe montre que $(R/\rho)^n$ est appréciable. On en déduit l'existence d'un nombre entier limité N tel que $N\rho^n > R^n$, d'où une contradiction. $\square$

Remarque 1. Le résultat précédent est aussi évidemment valable pour un espace métrique E qui est un sous-espace d'un espace affine associé à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de la distance provenant de la structure euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$ avec n limité. En particulier, c'est le cas de toute sphère de dimension limitée n munie de distance induite par celle de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Remarque 2. On peut *a posteriori* donner une interprétation physique des résultats positifs et négatifs quant à l'existence des représentants réguliers. Cela montrera la relative bonne qualité du modèle ici proposé pour les changements d'échelle dans des espaces raisonnables puisque les limites du formalisme mathématique semblent correspondre à des contraintes du phénomène modélisé. L'observateur qui, à une certaine échelle, regarde une partie A de E qui est de taille limitée à l'échelle considérée voit quelque chose, à savoir un représentant topologique de A à cette échelle. Le caractère nécessairement limité du champ visuel de l'observateur ne lui permet pas en une seule fois de saisir une partie A qui ne serait pas de taille limitée à l'échelle donnée. Dans ce dernier cas, il faut balayer du regard la partie A pour l'observer dans son intégralité, ce qui revient à faire varier la partie limitée à l'échelle donnée de A que l'on observe.

Remarque 3. Dans le cadre de théories plus puissantes (mais peut-être moins naturelles) de l'analyse non standard, on peut démontrer des résultats présentant une grande analogie avec le dernier théorème. Par exemple, dans la théorie IST d'E. Nelson on obtient l'énoncé suivant.

Pour toute échelle $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, toute partie d'un espace affine E standard de dimension finie qui est α-bornée possède un représentant régulier à l'échelle α.

En effet, quitte à choisir une origine dans A, on peut supposer que E est un espace vectoriel standard de dimension finie et que αA est une partie de E dont tous les points sont limités. Dans le cadre de la théorie IST, l'ensemble αA admet ce que l'on appelle une ombre B dans E. Cela signifie que B est la partie standard de E caractérisée par le fait que ses éléments standard sont les points standard de E à distance négligeable de αA. On en déduit que l'ensemble $\alpha^{-1}B$ contient tout point α-intérieur à A et qu'il existe un nombre $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha\boldsymbol{\varepsilon} \simeq 0$ pour lequel $\alpha^{-1}B \subset V_{\boldsymbol{\varepsilon}(A)}$.

Je remercie mes collègues informaticiens, particulièrement P. Boursier et T.Y. Jen, de m'avoir fait découvrir le phénomène des déformations topologiques par changements d'échelle et ses implications dans les SIG. Je remercie mes collègues mathématiciens rochelais, je pense surtout à E. Benoît et A. Fruchard, pour leurs conseils et l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'avancement de ce travail.

Références

[1] B.P. Buttenfield and R.B. McMaster. *Map Generalisation : Making Rules for Knowledge Representation.* Longman.

[2] F. Diener and M. Diener, editors. *Nonstandard Analysis in Practice.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1995.

[3] F. Diener and G. Reeb. *Analyse Non Standard.* Hermann, Paris, 1989.

[4] M.J. Egenhofer and R. Franzosa. Point-set topological spatial relationships. *International Journal of Geographical Information Systems*, 5(2) :161–174, 1991.

[5] T.Y. Jen. *Formalisation des relations spatiales topologiques et applications à l'exploitation des bases de données géographiques.* PhD thesis, Université de Paris-sud, UFR Scientifique d'Orsay, 1999.

[6] T.Y. Jen and P. Boursier. Filtre géographique et évolution des relations spatiales topologiques à différentes échelles. *Secondes Journées de la Recherche CASSINI'95.*

[7] T.Y. Jen and P. Boursier. A model for handling topological relationships in a 2d environnement. *6th International Symposium on Spatial Data Handling (SDH'94).*

[8] R. Lutz. Rêveries infinitésimales. *La Gazette des Mathématiciens*, octobre 1987(34).

[9] J.C. Muller, P. Lagrange, and R. Weibel. *GIS and Generalisation : Methodology and Practice.* Taylor & Francis, London, 1995.

[10] E. Nelson. Internal set theory : a new approach to nonstandard analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83(6) :1165–1198, 1977.

[11] E. Nelson. *Radically Elementary probability theory.* Princeton University Press, 1987.

[12] A. Robinson. *Non Standard Analysis.* Princeton University Press, 1996.

Guy Wallet
Laboratoire de Mathématiques Calcul Asymptotique
Pôle Sciences et Technologie de l'Université de La Rochelle
Avenue Michel Crépeau
17042 La Rochelle cedex 1
guy.wallet@univ-lr.fr
http ://www.univ-lr.fr/Labo/MATH/Personnel/wallet/

Liste des prépublications

99-1 Monique Jeanblanc et Nicolas Privault. A complete market model with Poisson and Brownian components.

99-2 Laurence Cherfils et Alain Miranville. Generalized Cahn-Hilliard equations with a logarithmic free energy. A paraître dans *Revista de la Real Academia de Ciencias.*

99-3 Jean-Jacques Prat et Nicolas Privault. Explicit stochastic analysis of Brownian motion and point measures on Riemannian manifolds. *Journal of Functional Analysis*, Vol. **167**, pp. 201-242, 1999.

99-4 Changgui Zhang. Sur la fonction q-Gamma de Jackson.

99-5 Nicolas Privault. A characterization of grand canonical Gibbs measures by duality. A paraître dans *Potential Analysis.*

99-6 Guy Wallet. La variété des équations surstables. A paraître dans *Bulletin de la Société Mathématique de France.*

99-7 Nicolas Privault et Jiang-Lun Wu. Poisson stochastic integration in Hilbert spaces. *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, Vol. **6**, pp. 41-61, 1999.

99-8 Augustin Fruchard et Reinhard Schäfke. Sursabilité et résonance.

99-9 Nicolas Privault. Connections and curvature in the Riemannian geometry of configuration spaces.

99-10 Fabienne Marotte et Changgui Zhang. Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique. A paraître dans *Annales de l'Institut Fourier*, 2000.

99-11 Knut Aase, Bernt Øksendal, Nicolas Privault et Jan Ubøe. White noise generalizations of the Clark-Haussmann-Ocone theorem with application to mathematical finance. A paraître dans *Finance and Stochastics.*

00-01 Eric Benoît. Canards en un point pseudo-singulier nœud. A paraître dans *Bulletin de la Société Mathématique de France.*

00-02 Nicolas Privault. Hypothesis testing and Skorokhod stochastic integration. A paraître dans *Journal of Applied Probability.*

00-03 Changgui Zhang. La fonction théta de Jacobi et la sommabilité des séries entières q-Gevrey, I.

00-04 Guy Wallet. Déformation topologique par changement d'échelle.