Prépublications du Département de Mathématiques

Université de La Rochelle
Avenue Michel Crépeau
17042 La Rochelle Cedex 1
http://www.univ-lr.fr/Labo/MATH

Sur les fonctions q-Bessel de Jackson

Changgui Zhang

Juillet 2000

Classification: 33C10, 33D15, 39A13, 44A10.
Mots clés: q-Bessel function, Connection matrix, Jacobi's theta function, q-Borel-Laplace transform.

2000/06

Sur les fonctions q-Bessel de Jackson

Changgui ZHANG

Résumé. La transformation de Laplace permet de résoudre des équations différentielles au voisinage d'un point singulier irrégulier. Le but de l'article est d'étudier comment appliquer une transformation de Borel-Laplace basique, aux équations aux q-différences satisfaites par les fonctions q-Bessel de F.H. Jackson. Des matrices de connexion sont obtenues entre des solutions à l'origine et des solutions à l'infini.

Summary (About Jackson q-Bessel functions). Laplace transform allows to resolve differential equations in the neighborhood of an irregular singular point. The purpose of the article is to study how to apply a basic Borel-Laplace transformation to q-difference equations satisfied by the q-Bessel functions of F.H. Jackson. Connection matrices are obtained between solutions at the origin and solutions at infinity.

Keywords and Subject Classification. q-Bessel function, Connection matrix, Jacobi's theta function, q-Borel-Laplace transform. 33C10, 33D15, 39A13, 44A10.

Abbreviated Title. Sur les fonctions q-Bessel de Jackson.

0. Position du problème.

En 1847, E. Heine a introduit le q-analogue ${}_2\phi_1(a,b;c;q,x)$ de la série hypergéométrique ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ d'Euler-Gauss par la formule

$$ {}_2\phi_1(a,b;c;q,x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(a;q)_n(b;q)_n}{(q;q)_n(c;q)_n}x^n, $$

où q désigne un élément de l'intervalle $]0,1[$, a, b, c désignent des nombres complexes tels que $c\notin q^{-\mathbb{N}}$, et où l'on note, pour tous $z\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}$:

$$ (z;q)_0=1,\quad (z;q)_{n+1}=(1-z)(1-zq)\dots(1-zq^n). $$

On s'apperçoit aussitôt que si $|x|<1$, alors

$$ \lim_{q\to 1^-}{}_2\phi_1(q^\alpha,q^\beta;q^\gamma;q,x)={}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) $$

pourvu que γ ne soit pas un entier négatif ou nul.

Soient $\mathcal{D}_q$, σ_q les opérateurs aux q-différences définis respectivement par les formules

$$ \mathcal{D}_qf(x)=\frac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x},\qquad \sigma_qf(x)=f(qx). $$

On peut vérifier que la fonction $u(x)={}_2\phi_1(a,b;c;q,x)$ satisfait à l'équation aux q-différences

(0.1)

$$ x(c-abx)\mathcal{D}_q^2u+\left[\frac{1-c}{1-q}+\frac{(1-a)(1-b)-(1-abq)}{1-q}x\right]\mathcal{D}_qu-\frac{(1-a)(1-b)}{(1-q)^2}u=0, $$

laquelle est une équation aux q-différences *fuchsienne* sur la sphère de Riemman $\mathbf{P}(\mathbb{C})$. En utilisant une intégrale Barnes-Mellin, G.N. Watson a établi, en 1910, une formule permettant de lier ${}_2\phi_1(a,b;c;q,x)$ à des solutions à l'infini de l'équation (0.1) :

$$
\begin{aligned}
{}_2\phi_1(a,b;c;q,x) &= C_1(x){}_2\phi_1(a,aq/c;aq/b;q,cq/abx) \\
&\qquad + C_2(x){}_2\phi_1(b,bq/c;bq/a;q,cq/abx)
\end{aligned}
\tag{0.2}
$$

où

$$
C_1(x) = \frac{(b,c/a;q)_\infty (ax,q/ax;q)_\infty}{(c,b/a;q)_\infty (x,q/x;q)_\infty}, \quad C_2(x) = \frac{(a,c/b;q)_\infty (bx,q/bx;q)_\infty}{(c,a/b;q)_\infty (x,q/x;q)_\infty}.
$$

Ici, on considère le prolongement analytique de la fonction ${}_2\phi_1(a,b;c;q,x)$ dans le secteur ouvert défini par $|\arg(-x)| < \pi$ et on suppose que les paramètres a, b, c vérifient les hypothèses suivantes :

$$
a,\ b \neq 0; \qquad c,\ a/b \notin q^{\mathbb{Z}}.
$$

Dans (0.2), on a posé, pour tous $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$:

$$
(z_1,z_2;q)_\infty = (z_1;q)_\infty (z_2;q)_\infty, \qquad (z_j;q)_\infty = \prod_{n\geq 0}(1 - z_j q^n).
$$

Il importe de noter que $C_j(qx) = C_j(x)$, $j = 1, 2$, ce qui signifie que les $C_j(x)$ sont des *fonctions q-périodiques*. On peut dire que la formule (0.2) est un q-analogue d'une formule de connexion classique pour la fonction ${}_2F_1(\alpha;\beta;\gamma;x)$ ou, plus exactement, pour l'équation hypergéométrique d'Euler-Gauss associée; pour plus de détails, voir [GR] page 106 et [Sa] page 116.

Dans le présent article, nous nous proposons d'établir une formule similaire à (0.2) mais cette fois pour la fonction ${}_2\phi_1(0,0;c;x)$ avec $c \neq 0$, cette dernière étant liée à une version q-analogue de l'équation différentielle hypergéométrique de Bessel. En fait, F.H. Jackson a introduit (*cf* [GR] page 25, [Is]), en 1905, deux versions q-analogues pour la famille des fonctions de Bessel J_ν, $\nu \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-2,-3,...\}$, dont l'une est la suivante :

$$
J_\nu^{(1)}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_2\phi_1(0,0;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2}{4});
$$

la définition de l'autre analogue $J_\nu^{(2)}(x;q)$ sera rappelée au §3 de notre article.

Soit $p = \sqrt{q}$; on a la relation

$$
(x\mathcal{D}_p - \frac{1-p^\nu}{1-p})\ (x\mathcal{D}_p - \frac{1-p^{-\nu}}{1-p}) J_\nu^{(1)}(x;q) + (\frac{x}{2(1-p)})^2 J_\nu^{(1)}(x;q) = 0,
$$

qui n'est rien d'autre qu'une version discrète de l'équation différentielle

$$
(x\frac{d}{dx} - \nu)\ (x\frac{d}{dx} + \nu)y + x^2 y = 0,
$$

dont la fonction limite $\lim_{q\to 1^-} J_\nu^{(1)}(x(1-q);q)$ est solution. Par ailleurs, l'équation précédente satisfaite par $y(x) = J_\nu^{(1)}(x;q)$ peut se mettre sous la forme ($p = \sqrt{q}$)

$$\{\sigma_q - (q^{\nu/2} + q^{-\nu/2})\sigma_p + (1 + \frac{x^2}{4})\}y(x) = 0, \tag{0.3}$$

laquelle indique que le point à l'origine est un point singulier fucshien et celui à l'infini un point singulier irrégulier (*cf* [Ad], [Zh] (a)).

Dans la suite, nous supposerons que ν **est un nombre réel fixé tel que** $\nu \notin \mathbb{Z}$. Vu que l'équation (0,3) se laisse invariante par la symétrie $\nu \to -\nu$, le couple de fonctions $(J_\nu^{(1)}(x;q), J_{-\nu}^{(1)}(x;q))$ constitue un *système fondamental de solutions* de l'équation au point à l'origine. Le reste de notre article a pour objectif initial d'établir la formule de connexion entre ce système de solutions et *le* système de solutions à l'infini, tout en sachant que deux systèmes fondamentaux de solutions d'une même équation aux q-différences linéaire peuvent être connectés par une matrice composée de *fonctions q-périodiques*; voir les coefficients $C_j(x)$ de (0.2) ci-dessus.

Décrivons brièvement le contenu de la suite de notre article. Dans les §1 et §2, nous appliquerons une transformation de Borel-Laplace q-analogue à l'équation q-Bessel (0.3) près du point à l'infini et nous obtiendrons un système fondamental de solutions au voisinage de l'infini; le résultat central est le théorème (1.4) et celui-ci donnera immédiatement la formule de connexion voulue, exprimée dans le théorème (2.1). Dans §3, la seconde famille des fonctions q-Bessel $J_\nu^{(2)}(x;q)$ sera considérée comme transformée de q-Borel-Laplace de la famille $J_\nu^{(1)}(x;q)$; le résultat principal de ce paragraphe est la formule (3.7). Le paragraphe 4 sera consacré à la détermination de $J_\nu^{(2)}(x;q)$ en des points "entiers". Dans le dernier paragraphe, nous ferons quelques commentaires sur des sujets connexes à ce présent travail : localisation des zéros de $J_\nu^{(2)}(x;q)$, fonctions trigonométriques q-analogues, groupe de Galois q-différentiel, phénomène de Stokes associé aux équations différentielles de Bessel, *etc.*

1. Résoudre l'équation (0.3) à l'aide d'une transformation de q-Borel-Laplace.

Posons $t = 1/x$ and $y(x) = z(t)$; l'équation (0.3) s'écrit sous la forme

$$\{\sigma_q^{-1} - (q^{\nu/2} + q^{-\nu/2})\sigma_p^{-1} + (1 + \frac{1}{4t^2})\}z(t) = 0;$$

on en déduit celle-ci :

$$\{(1 + \frac{1}{4q^2t^2})\sigma_q - (q^{\nu/2} + q^{-\nu/2})\sigma_p + 1\}z(t) = 0, \tag{1.1}$$

où $t = 0$ est un point singulier irrégulier. Nous allons chercher des solutions s'écrivant comme produit d'une *fonction q-exponentielle* (modifiée) par une série entière en t.

Utilisons la fonction thêta de Jacobi comme fonction q-exponentielle et posons

$$\theta_p(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p^{n(n-1)/2}t^n \ (= \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n(n-1)/4}t^n \ ).$$

La série $\theta_p(t)$ définit une fonction analytique sur $\mathbb{C}^*$ et dont $-p^{\mathbb{Z}}$ $(=\{-p^m : m \in \mathbb{Z}\})$ est l'ensemble des zéros; en outre, elle vérifie la relation fonctionnelle $t\theta_p(pt) = \theta_p(t)$.

Si l'on pose, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$:

$$\mathcal{E}_\alpha(t) = \frac{1}{\theta_p(-\alpha t)} \qquad \forall\ t \notin \frac{1}{\alpha}\, p^{\mathbb{Z}},$$

on définit une fonction méromorphes sur $\mathbb{C}^*$ et ayant $\frac{1}{\alpha}p^{\mathbb{Z}}$ pour ensemble des pôles; compte tenu de la relation $t\theta_p(pt) = \theta_p(t)$, on obtient

$$\sigma_p\mathcal{E}_\alpha(t) = -\alpha t\ \mathcal{E}_\alpha(t), \quad \sigma_q\mathcal{E}_\alpha(t) = \alpha^2\sqrt{q}\,t^2\ \mathcal{E}_\alpha(t).$$

Choisissons α de manière d'avoir $\alpha^2\sqrt{q}\,\frac{1}{4q^2} = -1$, *i.e* $\alpha = 2q^{3/4}i$ ou $\alpha = -2q^{3/4}i$; substituant $z(t) = \mathcal{E}_\alpha(t)f(t)$ dans l'équation (1.1), on parvient à l'équation

$$\{-(1+4q^2t^2)\sigma_q + \alpha\,(q^{\nu/2} + q^{-\nu/2})\,t\,\sigma_p + 1\}f(t) = 0, \tag{1.2}$$

laquelle admet des séries entières en t pour solution.

Considérons $f_\alpha(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ la série entière solution de (1.2) et telle que $a_0 = 1$; posons $g_\alpha(\tau)$ la série définie par

$$g_\alpha(\tau) = \mathcal{B}_{p;1}f_\alpha(\tau) := \sum_{n\geq 0} a_n\, p^{-n(n-1)/2}\,\tau^n$$

laquelle correspond formellement, dans la terminologie employée dans [Zh] (a) et (c), à la transformée de "p-Borel" d'ordre un de f_α (mais ici $0 < p < 1$!). De la relation

$$\mathcal{B}_{p;1}(t^m\sigma_p^\ell) = p^{-m(m-1)/2}\tau^m\sigma_p^{\ell-m}\mathcal{B}_{p;1} \qquad \forall \ell,\ m \in \mathbb{N},$$

on déduit que g_α satisfait à l'équation

$$g_\alpha(q\tau) = (1 + \alpha\,(q^{\nu/2} + q^{-\nu/2})\,\tau - 4q^{3/2}\,\tau^2)g(\tau).$$

Puisque $\alpha^2 = -4q^{3/2}$ et $0 < q < 1$, par itération on obtient :

$$g_\alpha(\tau) = \frac{1}{(-\alpha\, q^{\nu/2}\,\tau; q)_\infty(-\alpha\, q^{-\nu/2}\,\tau; q)_\infty}; \tag{1.3}$$

d'où la fonction g_α est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et admet

$$\{-\frac{q^{\nu/2-n}}{\alpha}, -\frac{q^{-\nu/2-n}}{\alpha} : n \in \mathbb{N}\}$$

pour pôles, simples. Par conséquent, *f_α est une fonction entière.*

(1.4) Théorème. *Conservant les notations et hypothèses ci-dessus, on a :*

$$f_\alpha(t) = \frac{\theta_p(-\alpha q^{\nu/2}t)}{(q, q^{-\nu}; q)_\infty}\ {}_2\phi_1(0, 0; q^{\nu+1}; q, -\frac{x^2}{4}) + \frac{\theta_p(-\alpha q^{-\nu/2}t)}{(q, q^{\nu}; q)_\infty}\ {}_2\phi_1(0, 0; q^{-\nu+1}; q, -\frac{x^2}{4})$$

où $xt = 1$ et $|x| < 2$.

Preuve – D'après la définition de g_α, la fonction f_α peut être vue comme le produit de Hadamard de g_α avec la fonction θ_p; par la formule de Cauchy et le théorème des résidus on trouve :

$$\begin{aligned} f_\alpha(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=r} g_\alpha(\tau)\,\theta_p(\frac{t}{\tau})\frac{d\tau}{\tau} \\ &\overset{(*)}{=} -\sum_{n\geq 0}\mathrm{Res}\,\{\,g_\alpha(\tau)\theta_p(\frac{t}{\tau})\frac{1}{\tau} : \tau = -\frac{q^{\nu/2-n}}{\alpha}\} \\ &\qquad\qquad -\sum_{n\geq 0}\mathrm{Res}\,\{\,g_\alpha(\tau)\theta_p(\frac{t}{\tau})\frac{1}{\tau} : \tau = -\frac{q^{-\nu/2-n}}{\alpha}\}, \end{aligned}$$

où $0 < r < r_0 := \max\{q^{\nu/2}/|\alpha|, q^{-\nu/2}/|\alpha|\}$. Le passage $(*)$ peut être justifié de la manière suivante : à chaque entier naturel N on associe dans le plan des τ le cercle $\mathcal{C}_N$, positivement orienté et ayant $|\tau| = q^{-N-1/2}r_0$ pour équation; on applique ensuite le théorème des résidus à l'intégrale de contour

$$\frac{1}{2\pi i}\,(\int_{\mathcal{C}_N} - \int_{|\tau|=r})\; g_\alpha(\tau)\,\theta_p(\frac{t}{\tau})\frac{d\tau}{\tau};$$

avec un résultat établi dans [Li] (*cf* [Zh] (a) Lemme 4.3.7), on minore sur les cercles $\mathcal{C}_N$ la fonction entière d'ordre zéro $\tau \mapsto 1/g_\alpha(\tau)$, ce qui implique que la limte de l'intégrale précédente effectuée sur ces celcles, quand N augmente indéfiniment, vaut zéro pourvu que le module de $|t|$ soit suffisamment grand.

On complète la preuve par des calculs des résidus, avec les formules suivantes ($n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$) :

$$\theta_p(p^n t) = p^{-n(n-1)/2}t^{-n}\theta_p(t),$$

$$\mathrm{Res}\,\{\,\frac{1}{(\tau/\lambda;q)_\infty}\,\frac{1}{\tau} : \tau = \lambda q^{-n}\} = \frac{(-1)^{n+1}q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_\infty(q;q)_n}, \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{(\lambda q^{-n};q)_n} = \frac{(-\lambda)^{-n}q^{n(n+1)/2}}{(\lambda;q)_\infty(q/\lambda;q)_n} \qquad (\lambda \notin q^{\mathbb{Z}}) \qquad \square$$

Dans le théorème précédent, $f_\alpha(-t) = f_{-\alpha}(t)$; en outre, on établit aisément le

(1.6) Corollaire. *On a :*

$${}_2\phi_1(0,0;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2}{4}) = \frac{(q,q^{-\nu};q)_\infty\;(\theta_p(-\alpha q^{-\nu/2}t)f_\alpha(t) - \theta_p(\alpha q^{-\nu/2}t)f_\alpha(-t))}{\theta_p(-\alpha q^{\nu/2}t)\;\theta_p(\alpha q^{-\nu/2}t) - \theta_p(\alpha q^{\nu/2}t)\;\theta_p(-\alpha q^{-\nu/2}t)}$$

où $xt = 1$ *et* $0 < |x| < 2$ $\square$

2. Formule de connexion pour l'équation (0.3).

Les fonctions $J_\nu^{(1)}(x;q)$, $J_{-\nu}^{(1)}(x;q)$ introduites par F.H. Jackson contituent une base de solution en $x = 0$ pour l'équation (0.3). En vu d'obtenir des formules de connexion exprimées au moyen de fonctions p-périodiques et uniformes (donc, *p-elliptiques*), nous nous proposons de considérer les fonctions $J^{(1)}_{\nu,\lambda}$, $J^{(1)}_{-\nu,\lambda}$ définies ci-dessous : posons, pour tout nombre compelxe non nul λ :

$$J^{(1)}_{\nu,\lambda}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\ \frac{\theta_p(\lambda q^{\nu/2}/x)}{\theta_p(\lambda/x)}\ {}_2\phi_1(0,0;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2}{4}),$$

la définition de $J^{(1)}_{-\nu,\lambda}$ étant similaire (changer ν par $-\nu$). Puisque $t\theta_p(pt) = \theta_p(t)$, la fonction $x \mapsto \frac{\theta_p(\lambda q^{\nu/2}/x)}{\theta_p(\lambda/x)}$ satisfait à la même équation aux q-différences que $x \mapsto x^\nu$; on en déduit que, étant donné un nombre complexe non nul λ, le couple $(J^{(1)}_{\nu,\lambda}(x;q), J^{(1)}_{-\nu,\lambda(x;q)})$ constitue, pour l'équation (0.3), un système fondamental de solutions méromorphes dans le disque pointé $0 < |x| < 2$.

Soient les fonctions $f_\alpha(t)$ ($\alpha = \pm 2q^{3/4}i$) étudiées dans le paragraphe précédent, dépendant du paramètre ν; posons

$$j^{(1)}_{\nu,\alpha}(t;q) = \frac{(q^{1/2},q^{1/2};q)_\infty}{\theta_p(-\alpha t)}\ f_\alpha(t);$$

on a les "symétries"

$$j^{(1)}_{-\nu,\alpha}(t;q) = j^{(1)}_{\nu,\alpha}(t;q) = j^{(1)}_{\nu,-\alpha}(-t;q);$$

par ailleurs, on fait remarquer que les fonctions $j^{(1)}_{\nu,\alpha}(t;q)$, $j^{(1)}_{\nu,-\alpha}(t;q)$ forment un système de solutions méromorphes dans le plan $\mathbb{C}^*$.

Posons enfin :

$$C_{\nu,\alpha}(\lambda,t;q) = \frac{(q^{1/2},q^{1/2};q)_\infty\ \theta_p(-\alpha q^{\nu/2}t)\ \theta_p(\lambda t)}{(q^{1+\nu},q^{-\nu};q)_\infty\ \theta_p(-\alpha t)\ \theta_p(\lambda q^{\nu/2}t)};$$

ceci définit une famille de fonctions p-elliptiques en t, c'est à dire :

$$C_{\nu,\alpha}(\lambda,te^{2\pi i};q) = C_{\nu,\alpha}(\lambda,t;q), \qquad C_{\nu,\alpha}(\lambda,pt;q) = C_{\nu,\alpha}(\lambda,t;q).$$

(2.1) Théorème (**Formule de connexion**). *On a :*

$$\begin{pmatrix} j^{(1)}_{\nu,\alpha}(t;q) \\ \\ j^{(1)}_{\nu,-\alpha}(t;q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{\nu,\alpha}(\lambda,t;q) & C_{-\nu,\alpha}(\lambda,t;q) \\ \\ C_{\nu,-\alpha}(\lambda,t;q) & C_{-\nu,-\alpha}(\lambda,t;q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^{(1)}_{\nu,\lambda}(x;q) \\ \\ J^{(1)}_{-\nu,\lambda}(x;q) \end{pmatrix}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $xt = 1$ *et* $0 < |x| < 2$.

Preuve – Ceci n'est qu'une réécriture du théorème (1.4). □

Discutons maintenant du cas limite, quand q tend vers 1, de la formule de connexion (2.1) où l'on substituera x par $(1-q)x$ et t par $t/(1-q)$ respectivement; pour ceci, on a besoin notamment de connaître du comportement asymptotique de la fonction $\theta_q(x)$ $(= \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n(n-1)/2}x^n)$ pour q infiniment proche de 1. Notons d'abord l'équation fonctionnelle

$$\theta_q(\sqrt{q}\ x) = \sqrt{-2\pi/\ln q}\ e^{-\frac{1}{2\ln q}(\log x)^2}\ \theta_{q^*}(\sqrt{q^*}\ x^*), \tag{2.2}$$

où l'on utilise la transformation $(q,x)\mapsto(q^*,x^*)$ définie par

$$q^*=e^{4\pi^2/\ln q},\quad x^*=e^{-\frac{2\pi i}{\ln q}\log x},$$

log désignant la détermination principale du logarithme sur la surface de Riemann de celui-ci notée $\tilde{\mathbb{C}}^*$. En posant, pour tous $q\in]0,1[$ et $x\in\tilde{\mathbb{C}}^*$:

$$T_q(x)=(-\ln q/(2\pi))^{1/4}\ e^{(\log x)^2/(4\ln q)}\ \theta_q(\sqrt{q}\ x),$$

on constate aussitôt que (2.2) équivaut à la suivante :

$$T_q(x)=T_{q^*}(x^*),$$

laquelle peut être obtenue, comme grand classique, avec la formule sommatoire de Poisson (*cf* [La] page 244, [Sa] page 69). Remarquons en passant que (2.2) représente une formule de connexion entre *les deux solutions types* – qui sont $\theta_q(\sqrt{q}\ x)$ et $e^{-(\log x)^2/(2\ln q)}$ – de la même équation aux q-différences $\sqrt{q}\ xy(qx)=y(x)$, la fonction $x\mapsto\theta_{q^*}(\sqrt{q^*}\ x^*)$ étant en fait *q-périodique*; cette dernière remarque guiderait une piste de retrouver la formule (2.2), avec des idées exploitées dans §5 de [Zh] (b).

A l'aide de la formule (2.2) (où $q^*\to 0$ si $q\to 1$) et/ou la formule du binôme basique, on peut établir la

(2.3) Proposition ([Sa] pages 71 et 74; [GR] page 9). *Soient γ, β deux nombres complexes non nuls et soit* log *la détermination principale du logarithme dans le plan coupé* $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$. *On a les assertions suivantes. (i) Pour tout* $x\in\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$, *on a :*

$$\lim_{q\to 1^-}\frac{\theta_q(q^\gamma/x)}{\theta_q(q^\beta/x)}=x^{\gamma-\beta}\equiv e^{(\gamma-\beta)\log x};$$

(ii) Pour tout $x\in\mathbb{C}\setminus[1,+\infty[$, *on a :*

$$\lim_{q\to 1^-}\frac{(q^\gamma x;q)_\infty}{(x;q)_\infty}=(1-x)^{-\gamma}\equiv e^{-\gamma\log(1-x)}\quad\square$$

Comme cas limite du résultat (ii) ci-dessus, on a la limite suivante de la fonction q-Gamma de Jackson (*cf* [As]) :

$$\lim_{q\to 1^-}\frac{(q^{\gamma+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\ (1-q)^\gamma=\frac{1}{\Gamma(\gamma+1)},\tag{2.4}$$

laquelle implique la limite

$$\lim_{q\to 1^-}\frac{(q^{1/2},q^{1/2};q)_\infty}{(q^{\nu+1},q^{-\nu};q)_\infty}=\frac{\Gamma(\nu+1)\ \Gamma(-\nu)}{\Gamma(1/2)\ \Gamma(-1/2)}=-\frac{1}{\sin(\nu\pi)}.\tag{2.5}$$

Avec la formule (2.2), on établit la version suivante de la proposition (2.3) :

$$\begin{aligned}&\lim_{q\to 1^-}\frac{\theta_q(q^\gamma/((1-q)x))}{\theta_q(q^\beta/((1-q)x))}\ (1-q)^{\beta-\gamma}\\ =\ &\lim_{q\to 1^-}\frac{(-q^\gamma/((1-q)x);q)_\infty}{(-q^\beta/((1-q)x);q)_\infty}\ (1-q)^{\beta-\gamma}=x^{\gamma-\beta}\end{aligned}\tag{2.6}$$

pour tout $x \in \mathbb{C} \backslash]-\infty, 0]$.

Revenons à la formule de connexion énoncée dans le théorème (2.1), substituons x par $(1-q)x$ et t par $t/(1-q)$ respectivement; pour alléger l'exposé, **fixons** $\alpha = 2q^{3/4}i$ et considérons seulement le cas où $\lambda = \alpha = 2q^{3/4}i$.

Quand $q \to 1$, on a $p \to 1$ et $1 - q \approx 2(1-p)$; avec (2.6) ou (2.2), on trouve $(x = 1/t)$:

$$\lim_{q \to 1^-} \frac{\theta_p(-\alpha q^{\nu/2} t/(1-q))}{\theta_p(-\alpha t/(1-q))} (1-q)^{-\nu} = (\frac{ix}{2})^{\nu} \quad \text{si } \arg(ix) \in]-\pi, \pi[,$$

$$\lim_{q \to 1^-} \frac{\theta_p(\alpha t/(1-q))}{\theta_p(\alpha q^{\nu/2} t/(1-q))} (1-q)^{\nu} = (-\frac{ix}{2})^{-\nu} \quad \text{si } \arg(-ix) \in]-\pi, \pi[.$$

On en déduit que, si la partie réelle de x est non nulle, alors

$$\lim_{q \to 1^-} \frac{\theta_p(-\alpha q^{\nu/2} t/(1-q)) \; \theta_p(\alpha t/(1-q))}{\theta_p(-\alpha t/(1-q)) \; \theta_p(\alpha q^{\nu/2} t/(1-q))} = e^{\nu\pi i};$$

en utilisant (2.5), on obtient

$$\lim_{q \to 1^-} C_{\nu,\alpha}(\alpha, t/(1-q); q) = -\frac{e^{\nu\pi i}}{\sin(\nu\pi)}$$

pour tout nombre complexe x de partie réelle non nulle.

Dans la même ligne de raisonnement, en combinant cette fois (2.4) et (2.6), on trouvera que pour tout $x \in \tilde{\mathbb{C}}^*$ tel que $\arg x \in]-\pi/2, 3\pi/2[$, on a :

$$\lim_{q \to 1^-} J_{\nu,\alpha}^{(1)}((1-q)x; q) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(x),$$

où l'on désigne par $J_\nu(x)$ la fonction de Bessel d'indice ν définie par

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} (\frac{x}{2})^\nu \; {}_0F_1(-; \nu+1; -\frac{x^2}{4}).$$

En conclusion, on a établi le résultat qui suit.

(2.7) Théorème. *Dans le théorème (2.1), fixons* $\lambda = \alpha = 2q^{3/4}i$ *et supposons* $x \in \tilde{\mathbb{C}}^*$ *vérifiant* $\arg x \in]-\pi/2, \pi/2[\cup]\pi/2, 3\pi/2[$*; on a* $(t = 1/x)$ *:*

$$\lim_{q \to 1^-} \begin{pmatrix} j_{\nu,\alpha}^{(1)}(t/(1-q); q) \\ j_{\nu,-\alpha}^{(1)}(t/(1-q); q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{e^{\nu\pi i/2}}{\sin(\nu\pi)} & \frac{e^{-\nu\pi i/2}}{\sin(\nu\pi)} \\ e^{-\nu\pi i/2} & e^{\nu\pi i/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_\nu(x) \\ J_{-\nu}(x) \end{pmatrix} \quad \square$$

Dans ce dernier théorème, la matrice limite a pour déterminant $\cot(\pi\nu)$; les limites, quand $q \to 1$, de $j_{\nu,\alpha}^{(1)}(t/(1-q); q)$ et $j_{\nu,-\alpha}^{(1)}(t/(1-q); q)$ sont alors deux fonctions proportionnelles si $\nu = 1/2$ modulo $\mathbb{Z}$.

3. Les fonctions q-Bessel $J_\nu^{(2)}(x;q)$ vues comme transformées de q-Borel-Laplace de $J_\nu^{(1)}(x;q)$.

Une seconde famille de fonctions q-Bessel introduite par F.H. Jackson est la suivante :

$$J_\nu^{(2)}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\,(\frac{x}{2})^\nu\ {}_0\phi_1(—;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2q^{\nu+1}}{4}),$$

où $x \in \tilde{\mathbb{C}}^*$ et où la série hypergéométrique basique ${}_0\phi_1(...)$, de rayon de convergence infini, est définie par

$${}_0\phi_1(—;c;q,x) = \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n(n-1)}}{(q;q)_n(c;q)_n}\,x^n \quad (c \notin q^{-\mathbb{N}}).$$

Par un calcul directe, on peut vérifier que la fonction $J_\nu^{(2)}(x;q)$ est solution de l'équation aux q-différences ([Is])

$$\{(1+q\frac{x^2}{4})\sigma_q - (q^{\nu/2}+q^{-\nu/2})\sigma_p + 1\}y(x) = 0, \tag{3.1}$$

pour laquelle $J_{-\nu}^{(2)}(x;q)$ est aussi solution.

D'après W. Hahn (*cf* [GR] page 25), on a la relation

$$J_\nu^{(2)}(x;q) = (-x^2/4;q)_\infty\ J_\nu^{(1)}(x;q), \quad |x|<2; \tag{3.2}$$

celle-ci équivaut à dire que la transformation $y \to (-x^2/4;q)_\infty\, y$ permet de passer de l'équation (0.3), satisfaite par $J_\nu^{(1)}(x;q)$, à l'équation (3.1) de $J_\nu^{(2)}(x;q)$. Par ailleurs, avec (3.2) on obtient que

$$\lim_{q\to 1^-} J_\nu^{(2)}((1-q)x;q) = \lim_{q\to 1^-} J_\nu^{(1)}((1-q)x;q).$$

Un point de vue adopté dans ce paragraphe consiste de regarder les fonctions $J_\nu^{(2)}(x;q)$ comme transformées de q-Borel-Laplace de $J_\nu^{(2)}(x;q)$. Comme dans [Zh] (a), appelons *transformation de p-Laplace d'ordre un* (ou de q-Laplace d'ordre 1/2) l'automorphisme $\mathcal{L}_{p;1}$ de l'espace $\mathbb{C}$-vectoriel $\mathbb{C}[[x]]$ qui envoie tout monôme x^n en $p^{n(n-1)/2}x^n$. On a :

$$\mathcal{L}_{p;1}\ {}_2\phi_1(0,0;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2}{4}) = {}_0\phi_1(—;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2q^{1/2}}{4}), \tag{3.3}$$

ce qui implique, avec (3.2), la relation

$${}_0\phi_1(—;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2q^{1/2}}{4}) = \mathcal{L}_{p;1}\,(\frac{{}_0\phi_1(—;q^{\nu+1};q,-x^2q^{\nu+1}/4)}{(-x^2/4;q)_\infty})\ . \tag{3.4}$$

Pour abréger, notons

$$\phi_\nu(x) = {}_0\phi_1(—;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2}{4});$$

c'est une fonction entière qui admet à l'infini une croissance q-exponentielle d'ordre un, du type $O(e^{-\frac{1}{2\ln p}((\ln|x|)^2-4\ln 2)})$.

D'une façon tout à fait analogue à ce que l'on a fait dans la preuve du théorème (1.4), on déduit de la relation (3.4) les égalités suivantes :
(3.5)

$$
\begin{aligned}
\phi_\nu(\sqrt{p}\ x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r} \frac{\phi_\nu(p^{\nu+1}\xi)}{(-\xi^2/4;q)_\infty}\ \theta_p(\frac{x}{\xi})\ \frac{d\xi}{\xi} \\
&\overset{(*)}{=} -\sum_{n\geq 0} \mathrm{Res}\ (\frac{\phi_\nu(p^{n+1}\xi)}{(i\xi/2;p)_\infty\ (-i\xi/2;p)_\infty}\ \theta_p(\frac{x}{\xi})\ \frac{1}{\xi} : \xi = \pm 2ip^{-n}) \\
&\overset{(**)}{=} \frac{1}{2\ (q;q)_\infty}\ (\theta_p(-\frac{ix}{2})\ \sum_{n\geq 0}\frac{p^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n}\ \phi_\nu(2ip^{\nu+1-n})\ (-\frac{2pi}{x})^n \\
&\qquad +\theta_p(\frac{ix}{2})\ \sum_{n\geq 0}\frac{p^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n}\ \phi_\nu(-2ip^{\nu+1-n})\ (\frac{2pi}{x})^n)\ .
\end{aligned}
$$

Ici, le rayon r est choisi plus petit que 2; l'égalité (*) résulte du théorème des résidus car, pour tout (paramètre) x de module assez grand, l'intégrand est une fonction du type $O(|\xi|^{-2})$ quand $|\xi| = 2p^{-n+1/2} \to \infty$ (un argument du à Littlewood) ; et l'on obtient le passage (**) en réactualisant les formules (1.5).

Puisque la fonction $x \mapsto \phi_\nu(x)$ est paire, on a, dans (3.5),

$$\phi_\nu(2ip^{\nu+1-n}) = \phi_\nu(-2ip^{\nu+1-n})$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, on a :

$$\phi_\nu(2ip^{\nu+1}) = \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n(n-1)}}{(q,q^{\nu+1};q)_\infty}\ q^{(\nu+1)n} = \frac{1}{(q^{\nu+1};q)_\infty},$$

d'après la formule (1.5.1) de [GR], page 10 (avec $c = q^{\nu+1}$, a et b tendant vers l'infini).

(3.6) Proposition. *Pour tout entier n positif ou nul, on a :*

$$(q^{\nu+1};q)_\infty\ \phi_\nu(2ip^{\nu+1-n})\ p^{-\nu n} = (q^{-\nu+1};q)_\infty\ \phi_{-\nu}(2ip^{-\nu+1-n})\ p^{\nu n}.$$

Ce résultat sera obtenu comme une conséquence du théorème (1.4); pour ne pas couper la "file de conduite" suivie, nous nous contenterions de mettre la preuve en début du paragraphe suivant (§4).

Cela étant, posons $t = 1/x$ et associons, à chaque $\alpha \in \{2q^{3/4}i, -2q^{3/4}i\}$ (**ces α étant déjà choisis dans §1 !**), la série entière de t :

$$h_\alpha(t) = (q^{\nu+1};q)_\infty\ \sum_{n\geq 0}\frac{p^{n(n-1)/2}}{(q;q)_n}\ \phi_\nu(2ip^{\nu+1-n})\ p^{-\nu n}\ (\alpha t)^n,$$

dont $1/2$ est le rayon de convergence et qui vaut 1 en $t = 0$. Il importe de noter que, d'après la proposition (3.6), la série $h_\alpha(t)$ se laisse invariante par l'involution $\nu \leftrightarrow -\nu$ (penser à la fonction f_α définie dans le paragraphe 1).

En vertu de (3.5) et de la relation $\theta_p(px) = \theta_p(1/x)$, on obtient :

$$(3.7) \qquad \phi_\nu(p^{\nu+1}x) = \frac{1}{2\ (q, q^{\nu+1}; q)_\infty}\ (\theta_p(-\alpha p^{-\nu-1}t)\ h_\alpha(t) + \theta_p(\alpha p^{-\nu-1}t)\ h_\alpha(-t))\ ;$$

autrement dit, on a :

$$J_\nu^{(2)}(x;q) = \frac{1}{2\ (q, q; q)_\infty}\ (\frac{x}{2})^\nu\ (\theta_p(-\alpha p^{-\nu-1}t)\ h_\alpha(t) + \theta_p(\alpha p^{-\nu-1}t)\ h_\alpha(-t))\ .$$

Introduisons les versions "uniformes" $J_{\nu,\lambda}^{(2)}(x;q)$ des fonctions $J_\nu^{(2)}(x;q)$ où λ est un paramètre complexe non nul :

$$J_{\nu,\lambda}^{(2)}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\ \frac{\theta_p(\lambda q^{\nu/2}/x)}{\theta_p(\lambda/x)}\ {}_0\phi_1(—; q^{\nu+1}; q, -\frac{x^2 q^{\nu+1}}{4}).$$

Posons enfin :

$$j_{\nu,\alpha}^{(2)}(t;q) = \frac{\theta_p(-\alpha p^{-1}t)}{(q,q;q)_\infty}\ h_\alpha(t), \quad |t| < 1/2.$$

(3.8) Théorème (**Formule de connexion**). *Pour tout nombre complexe non nul λ, on a :*

$$\begin{pmatrix} J_{\nu,\lambda}^{(2)}(x;q) \\ \\ J_{-\nu,\lambda}^{(2)}(x;q) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_{\nu,\alpha}(\lambda,t;q) & D_{\nu,-\alpha}(\lambda,t;q) \\ \\ D_{-\nu,\alpha}(\lambda,t;q) & D_{-\nu,-\alpha}(\lambda,t;q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{\nu,\alpha}^{(2)}(t;q) \\ \\ j_{\nu,-\alpha}^{(2)}(t;q) \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \{2p^{3/2}i, -2p^{3/2}i\}$, $xt = 1$, $|x| > 2$ et où l'on pose :

$$D_{\nu,\alpha}(\lambda,t;q) = \frac{\theta_p(-\alpha p^{-\nu-1}t)\ \theta_p(\lambda p^\nu t)}{\theta_p(-\alpha p^{-1}t)\ \theta_p(\lambda t)}.$$

De plus, les $(J_{\nu,\lambda}^{(2)}(x;q), J_{-\nu,\lambda}^{(2)}(x;q))$ et $(j_{\nu,\alpha}^{(2)}(t;q), j_{\nu,-\alpha}^{(2)}(t;q))$ constituent deux systèmes de solutions méromorphes sur $\mathbb{C}^*$ pour l'équation (3.1), et la matrice composée des fonctions $t \mapsto D_{\pm\nu,\pm\alpha}(\lambda,t;q)$ est p-elliptique.

Preuve – Avec (3.7), on obtient immédiatement la matrice de connexion énoncée, qui est clairement p-elliptique; en plus, $(J_{\nu,\lambda}^{(2)}(x;q), J_{-\nu,\lambda}^{(2)}(x;q))$ est un système de solutions pour (3.1), il en est alors de même pour $(j_{\nu,\alpha}^{(2)}(t;q), j_{\nu,-\alpha}^{(2)}(t;q))$. □

Comme dans §3, on pourrait étudier, quand q tend vers 1, l'évolution de la matrice de connexion formée des fonctions $D_{\pm\nu,\pm\alpha}(\lambda, t/(1-q); q)$.

4. Les valeurs de ${}_0\phi_1(—; q^{\nu+1}; q, -x^2/4)$ en des points "entiers".

Démontrons d'abord la proposition (3.6); pour ceci, on va appliquer au théorème (1.4) le

(4.1) Lemme. *Soit λ un nombre complexe différent de zéro, x, t deux indéterminées telles que $xt = 1$, et soit $w(x)$ une série entière de rayon de convergence* *non nul. Si l'on développe la fonction produit $\theta_p(\lambda t)\ w(x)$ en une série de Laurent de t, on a :*

$$\theta_p(\lambda t)w(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \lambda^\ell p^{\ell(\ell-1)/2}\ (\mathcal{L}_{p;1}w(p^\ell\lambda))\ t^\ell,$$

où $\mathcal{L}_{p;1}w(p^\ell\lambda)$ désigne la valeur prise au point $x = p^\ell\lambda$ par la transformée de p-Laplace d'ordre un de la série $w(x)$.

Preuve – Cela découle d'un calcul directe. □

Compte tenu du lemme précédent et de la formule (3.3), le théorème (1.4) équivaut à dire que, si l'on pose $f_\alpha(t) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f_{\alpha,\ell}t^\ell$, alors

$$f_{\alpha,\ell} = \frac{p^{\ell(\ell-1)/2}}{(q,q^{-\nu};q)_\infty}\ {}_0\phi_1(-;q^{\nu+1};q,q^{\ell+2+\nu})\ (-\alpha q^{\nu/2})^\ell$$

$$+\frac{p^{\ell(\ell-1)/2}}{(q,q^{\nu};q)_\infty}\ {}_0\phi_1(-;q^{-\nu+1};q,q^{\ell+2-\nu})\ (-\alpha q^{-\nu/2})^\ell.$$

Puisque $f_{\alpha,-n-1} = 0$ pour tout entier n positif ou nul, on obtient ainsi la proposition (3.6).

En développant g_α au moyen de la formule du binôme basique ([GR] page 9, formule (1.3.15)), on trouvera les coefficients $f_{\alpha,n}$ de f_α comme suit :

$$f_{\alpha,n} = p^{n(n-1)/2}\ (-\alpha)^n \sum_{\ell=0}^{n} \frac{q^{(-\nu\ell+\nu(n-\ell))/2}}{(q;q)_\ell\ (q;q)_{n-\ell}} \quad \forall n\in\mathbb{N}; \tag{4.2}$$

on en déduit l'identité : $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{q^{n\nu/2}}{(q^{-\nu};q)_\infty}\ {}_0\phi_1(-;q^{\nu+1};q,q^{\nu+n+2}) + \frac{q^{-n\nu/2}}{(q^{\nu};q)_\infty}\ {}_0\phi_1(-;q^{-\nu+1};q,q^{-\nu+n+2})$$
$$= \sum_{\ell=0}^{n} \frac{q^{(-\nu\ell+\nu(n-\ell))/2}}{(q;q)_\ell\ (q;q)_{n-\ell}}$$

ou, compte tenu de la relation (3.2) :

$$\frac{q^{n\nu/2}}{(q^{-\nu};q)_\infty}\ {}_2\phi_1(0,0;q^{\nu+1};q,q^{n+1}) + \frac{q^{-n\nu/2}}{(q^{\nu};q)_\infty}\ {}_2\phi_1(0,0;q^{-\nu+1};q,q^{n+1})$$
$$= \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(q;q)_n}{(q;q)_\ell\ (q;q)_{n-\ell}}\ q^{(-\nu\ell+\nu(n-\ell))/2}.$$

Des expressions, relativement lourdes, de ${}_2\phi_1(0,0;q^{k+1};q,q^{n+1})$ et ${}_0\phi_1(-;q^{k+1};q,q^{k+n+2})$ ($k\in\mathbb{N}$) pourraient être déduites par passage à la limite dans les deux dernières identités ci-dessus, avec $\nu = k+\varepsilon$, $\varepsilon\to 0$.

Le théorème (3.8) affirme que $\theta_p(-\alpha p^{-1}t)h_\alpha(t)$ est solution de l'équation (3.1). Soit $y(x) = \theta_p(-\alpha p^{-1}t)z(t)$; l'équation (3.1) se transforme en celle-ci :

$$\{\sigma_q + \alpha(q^{\nu/2}+q^{-\nu/2})t\sigma_p - (1+4qt^2)\}z(t) = 0$$

(ici $\sigma_p z(t) = z(pt)$, $\sigma_q z(t) = z(qt)$). Si l'on pose $\eta_\alpha(t) = \mathcal{L}_{p;1} h_\alpha(t)$, on obtient :

$$\{(1+\alpha(q^{\nu/2}+q^{-\nu/2})t - 4q^{3/2}t^2)\sigma_q - 1\}\eta_\alpha(t) = 0, \tag{4.3}$$

où l'on a utilisé les relations opérationnelles

$$\mathcal{L}_{p;1}\sigma_p = \sigma_p \mathcal{L}_{p;1}, \quad \mathcal{L}_{p;1}(t\sigma_p) = t\sigma_q\mathcal{L}_{p;1}, \quad \mathcal{L}_{p;1}(t^2) = pt^2\sigma_q\mathcal{L}_{p;1}.$$

Par itération, la relation (4.3) ci-dessus donne :

$$\eta_\alpha(t) = (-\alpha q^{\nu/2}t;q)_\infty\ (-\alpha q^{-\nu/2}t;q)_\infty,$$

ce qui permet d'écrire, avec la formule du binôme basique ([GR] page 9, formule (1.3.16)) :

$$\eta_\alpha(t) = \sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}(\alpha t)^n \sum_{\ell=0}^{n} \frac{q^{(\nu\ell-\nu(n-\ell))/2}}{(q;q)_\ell\ (q;q)_{n-\ell}}.$$

En revenant à la définition de la série entière $h_\alpha(t)$, on obtient :

$${}_0\phi_1(—;q^{\nu+1};q;q^{\nu+1-n}) = \frac{(q;q)_n}{(q^{\nu+1};q)_\infty} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{q^{(n-\ell)(\nu-\ell)}}{(q;q)_\ell\ (q;q)_{n-\ell}}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

En conclusion, on a démontré le

(4.4) Théorème. *Si $c\notin q^{-\mathbb{N}}$, alors on a pour tout entier n positif ou nul :*

$${}_0\phi_1(—;c;q,c/q^n) = \frac{1}{(c;q)_\infty} \sum_{\ell=0}^{n} q^{\ell(\ell-1)} \begin{bmatrix} n \\ \ell \end{bmatrix}_q (c/q^n)^\ell,$$

où $\begin{bmatrix} n \\ \ell \end{bmatrix}_q = \dfrac{(q;q)_n}{(q;q)_\ell\ (q;q)_{n-\ell}}$. □

Il est à noter que ce dernier résultat peut aussi être obtenu à partir d'une formule générale de S. Ramanujan (*cf* [ABBW] page 9, Entry 9).

5. Commentaires.

Il est bien connu que la transformation de Laplace joue un rôle important dans l'analyse de la singularité d'une équation différentielle analytique ainsi que dans la théorie des fonctions spéciales. Nous avons examiné ([Zh] (a), (c)) durant ces dernières années, des possibilités de faire adapter cette transformation à l'étude locale d'une singularité d'une équation aux q-différences; la version adoptée dans le présent article est introduite dans la Note [Zh] (c). Nous allons terminer l'article par quelques commentaires sur les résultats obtenus ci-dessus.

(5.1) La formule (3.7), valable pour tout paramètre ν n'appartenant pas à l'ensemble des entiers strictement négatifs, est une version q-analogue du développement asymptotique suivant (*cf* [In] page 173) :

$$J_\nu(x) \sim (\frac{2}{\pi x})^{1/2}(U_\nu\cos(x-\nu\pi/2-\pi/4) + V_\nu\sin(x-\nu\pi/2-\pi/4))$$

où U, V sont deux séries entières, divergentes, de $1/x$. Les "grands zéros" ξ de $J_\nu(x)$ sont approximativement donnés par la simple relation trigonométrique

$$\cot(\xi - \nu\pi/2 - \pi/4) = 0.$$

De façon similaire, les "grands zéros" ξ de $J_\nu^{(2)}(x;q)$ sont voisins des grandes racines de l'équation "elliptique"

$$\theta_p(-\alpha p^{-\nu-1}\xi) + \theta_p(\alpha p^{-\nu-1}\xi) = 0;$$

ceci fournit une explication à des résultats de M.E.H. Ismail [Is].

(5.2) Dans le théorème (2.1), les fonctions $j_{\nu,\alpha}^{(1)}(t/(1-q);q)$ converge sur des secteurs quand q tend vers 1. Ecrivons

$$j_{\nu,\alpha}^{(1)}(t/(1-q);q) = E(x;q)\ A(t;q)\ \hat{f}(t;q)$$

avec $x = 1/t$, $\theta_p(u) = (p;p)_\infty\ (-u;p)_\infty\ (-p/u;p)_\infty$ et

$$E(x;q) = \frac{(q^{1/2}, q^{1/2}; q)_\infty}{(p, p^{3/2}(1-q)x/\alpha; p)_\infty}\ (1-q)^{-1/2},$$

$$A(t;q) = \frac{\theta_p(-\alpha p^{-1/2}t/(1-q))}{\theta_p(-\alpha t/(1-q))}\ (1-q)^{1/2},$$

$$\hat{f}(t;q) = \frac{1}{(\alpha p^{1/2}t/(1-q);p)_\infty}\ f_\alpha(t/(1-q));$$

au moyen des arguments développés au §2, on obtiendra que

$$\lim_{q\to 1^-} E(x;q) = \frac{e^{\pm xi}}{\Gamma(1/2)}, \quad \lim_{q\to 1^-} A(t;q) = (\pm\frac{2}{ix})^{1/2},$$

où l'on utilise le signe "+" si $\alpha = 2q^{3/4}i$, et "$-$" sinon. Il en résulte que la fonction analytique somme de la série entière $\hat{f}(t;q)$ converge pour $q \to 1$. Connaissant la formule explicite (4.2) pour les coefficients de f_α, il serait possible de prouver que les séries $\hat{f}(t;q)$, ayant q pour paramètre, convergent terme à terme vers une série entière divergente. Peut-t-on en déduire une explication sur le phénomène de Stokes associé à la famille des équations différentielles de Bessel ?

(5.3) Dans la famille des fonctions q-Bessel $J_\nu^{(k)}(x;q)$ ($k = 1, 2$), il y a notamment les versions q-analogues de $\sin x$ et $\cos x$, introduites par F.H. Jackson (*cf* [GR] page 23); ces dernières correspondent aux cas où $\nu = -1/2,\ 1/2$. Par exemple, on a :

$$\cos_p(x) = {}_2\phi_1(0,0;q^{1/2};q,-x^2),$$

et le corollaire (1.6) impliquera :

$$\cos_p(x) = -\frac{(q,p;q)_\infty}{2}\left(\frac{f_\alpha(t/2)}{\theta_p(\alpha t p^{-1/2}/2)} + \frac{f_\alpha(-t/2)}{\theta_p(-\alpha t p^{-1/2}/2)}\right).$$

Nous avons supposé $\nu \notin \mathbb{Z}$. Comme on vient de faire remarquer dans (5.1), cette hypothèse restrictive peut être remplacée dans une bonne partie de §3, par $\nu \notin -\mathbb{N}^*$. En ce qui concerne le théorème (1.4), si ν était un entier non strictement négatif, on aurait à la place de ${}_2\phi_1(0,0;q^{-\nu+1};q,-x^2/4)$ une partie q-logarithmique; ceci résulte du fait que l'on aurait à appliquer le théorème des résidus à une fonction ayant des pôles doubles (voir le dernier paragraphe de [Zh] (c)). Une autre façon de traiter le cas de ν entier non négatif consisterait à poser, dans (1.4), $\nu = k + \varepsilon$ ($k \in \mathbb{N}$) puis à passer à la limite avec $\varepsilon \to 0$.

(5.4) La formule de connexion (0.2), rappelée au début de l'article et due à G.N. Watson, concerne la famille des séries hypergéométriques basiques ${}_2\phi_1(a,b;c;q,x)$, mais elle ne reste valable que si $ab \neq 0$. Nous ne savons pas s'il existe une manière de voir nos formules (1.4) et (3.7) comme cas "dégénérés" de (0.2). Dans cette direction, y a-t-il des formules similaires pour les séries ${}_2\phi_1(a,b;c;q,x)$ avec $a = 0$ mais $bc \neq 0$?

La connaissance de la matrice de connexion à la Birkhoff permet de classifier les équations aux q-différences linéaires fuchsiennes sur $\mathbf{P}(\mathbb{C})$; en plus, elle sert à décrire leur groupe de Galois associé. Pour ces matières, voir [Bi], [Et], [Sa]. On en connaît peu d'énoncés dans le cas non fuchsien.

Nota. Je tiens à remercier les professeurs Mourad E.H. Ismail et Jean-Pierre Ramis pour le témoignage de leurs intérêt et encouragement.

Références

[ABBW] C. Adiga, B.C. Berdt, S. Bhargava et G.N. Watson, Chapter 16 of Ramanujan's second notebook: Theta-functions and q-series, *Mem. A. M. S.* 315, 1-85 (1985).

[Ad] C.R. Adams, Linear q-Difference Equations, *Bull. A. M. S.* 37, 361-382 (1931).

[As] R. Askey, The q-gamma and q-beta functions, *Appl. Anal.* 8 , 125-141 (1978).

[Bi] G.D. Birkhoff, The Generalized Riemann Problem for Linear Differential Equations and the Allied Problems for Linear Difference and q-Difference Equations, *Proc. Am. Acad.* 49, 521-568 (1913).

[Et] P.I. Etingof, Galois groups and connection matrices of q-difference equations, *Electronic Research Announcements of A. M. S.* 1, 1-9 (1995).

[GR] G. Gasper et M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Encycl. Math. Appl., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[In] E.L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover publications, Inc., 1956.

[Is] M.E.H. Ismail, The zeros of basic Bessel functions, the functions J(nu+ax)(x), and associated orthogonal polynomials, *J. Math. Anal. Appl.* 86, 1-19 (1982).

[La] S. Lang, *Real and Functional Analysis*, Third Edition, Springer-Verlag New-York, Inc. 1993.

[Li] J.E. Littlewood, On the asymptotic approximation to integral functions of zero order, *Proc. London Math. Soc.*, Serie 2, no 5, 361-410 (1907).

[Ra] J.P. Ramis, About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations, *Annales de la Fac. de Toulouse*, Série 6, Vol. I, no 1, 53-94 (1992).

[Sa] J. Sauloy, Théorie de Galois des équations aux q-différences fuchsiennes, *Thèse de Toulouse*, 1999.

[Zh] C. Zhang, (a) Développements asymptotiques q-Gevrey et séries Gq-sommables, *Ann. Inst. Fourier*, 49, no 1, 227-261 (1999); (b) Sur la fonction q-Gamma de Jackson, *Aequationes Mathematicae*, à paraître; (c) Transformations de q-Borel-Laplace au moyen de la fonction thêta de Jacobi, *C. R. Acad. Sci. Paris*, à paraître (2000).

La Rochelle, Juin 2000

Liste des prépublications

99-1 Monique Jeanblanc et Nicolas Privault. A complete market model with Poisson and Brownian components. A paraître dans *Proceedings of the Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications*, Ascona, 1999.

99-2 Laurence Cherfils et Alain Miranville. Generalized Cahn-Hilliard equations with a logarithmic free energy. A paraître dans *Revista de la Real Academia de Ciencias.*

99-3 Jean-Jacques Prat et Nicolas Privault. Explicit stochastic analysis of Brownian motion and point measures on Riemannian manifolds. *Journal of Functional Analysis*, Vol. **167**, pp. 201-242, 1999.

99-4 Changgui Zhang. Sur la fonction q-Gamma de Jackson. A paraître dans *Aequationes Math.*

99-5 Nicolas Privault. A characterization of grand canonical Gibbs measures by duality. A paraître dans *Potential Analysis.*

99-6 Guy Wallet. La variété des équations surstables. A paraître dans *Bulletin de la Société Mathématique de France.*

99-7 Nicolas Privault et Jiang-Lun Wu. Poisson stochastic integration in Hilbert spaces. *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, Vol. **6**, pp. 41-61, 1999.

99-8 Augustin Fruchard et Reinhard Schäfke. Sursabilité et résonance.

99-9 Nicolas Privault. Connections and curvature in the Riemannian geometry of configuration spaces. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, t. 330, pp. 899-904, 2000.*

99-10 Fabienne Marotte et Changgui Zhang. Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique. A paraôtre dans *Annales de l'Institut Fourier*, 2000.

99-11 Knut Aase, Bernt Øksendal, Nicolas Privault et Jan Ubøe. White noise generalizations of the Clark-Haussmann-Ocone theorem with application to mathematical finance. A paraître dans *Finance and Stochastics.*

00-01 Eric Benoît. Canards en un point pseudo-singulier nœud. A paraître dans *Bulletin de la Société Mathématique de France.*

00-02 Nicolas Privault. Hypothesis testing and Skorokhod stochastic integration. A paraître dans *Journal of Applied Probability.*

00-03 Changgui Zhang. La fonction théta de Jacobi et la sommabilité des séries entières q-Gevrey, I. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, t. 331, 2000.*

00-04 Guy Wallet. Déformation topologique par changement d'échelle.

00-05 Nicolas Privault. Quantum stochastic calculus for the uniform measure and Boolean convolution.

00-06 Changgui Zhang. Sur les fonctions q-Bessel de Jackson.