Prépublications du Département de Mathématiques
Université de La Rochelle
Avenue Marillac
17042 La Rochelle Cedex 1
http ://www.univ-lr.fr/Labo/MATH

Remarques sur les sentinelles pour les systèmes distribués

Abdallah El Hamidi

Septembre 2001

Classification :
Mots clés :

2001/06

Remarques sur les sentinelles pour les systèmes distribués

Abdallah El Hamidi

6 octobre 2001

Résumé. Cette Note se place dans le cadre de la théorie des sentinelles des systèmes distribués développée par J. L. Lions [3, 4]. La recherche des sentinelles se ramène généralement à un problème de minimisation sur un sous-espace affine fermé dans un espace de Hilbert. En utilisant ce fait, une autre approche pour la détermination des sentinelles et l'étude de la furtivité est proposée. Cette approche est illustrée sur deux exemples d'équation parabolique scalaire non linéaire, mais elle peut être facilement généralisée à d'autres situations.

Remarks on sentinels for distributed systems

Abstract. *The framework of this Note is the theory of sentinels for distributed systems introduced by J. L. Lions [3, 4]. The determination of sentinels can be usually reduced to a minimization problem on an closed and affine subspace of a Hilbert space. Using this fact, another approach to determine sentinels and study stealthiness is proposed. This approach is illustred on two nonlinear scalar parabolic equations, but it can be generalized easily to other situations.*

Abridged English version

• Non arbitrary missing terms

Let Ω be a regular and bounded domain of $\mathbb{R}^n$ and consider the parabolic system (1), where $A(t)$ is a second order elliptic differential operator ($t \in]0, T[$) and f is a differentiable (non-linear) real function. The "missing terms" $\tau_i \hat{y}_i$, $i \in \{1, ..., M\}$, are such that : $\{\hat{y}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant M}$ is a given and linearly independant family in $L^2(\Omega)$, and $|\tau_i| << 1$, for $1 \leqslant i \leqslant M$. The "pollution term" $\lambda\hat{\xi}$ is such that : $|\lambda| << 1$ and $||\hat{\xi}||_{L^2(\Sigma)} \leqslant 1$. We make the following hypothesis :

(H-1) : Problem (1) has a unique solution which is differentiable according to λ and τ.

(H-2) : The solution y of (1) is available on Ω at $t = T$, *i.e.*, $y(x, T, \lambda, \tau)$ is known.

(H-3) : The conditions of the "Backward Uniqueness Theorem" [6, 2] are satisfied for the operator $\frac{\partial}{\partial t} + A(t) + f'(\overline{y})$ in $\Omega\times]0, T[$, where $\overline{y}$ is the solution of (1) with $\lambda = \tau_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant M$.

For h_0 given in $L^2(\Omega)$, the sentinel defined by h_0 is the function $S(\lambda,\tau)$, defined by (2), such that (3)-(4) are satisfied. Then, we have:

THEOREM 0.1. – *Consider the system (1), the sentinel defined by h_0 is given by $S(\lambda,\tau) =< (id_{L^2(\Omega)} - \pi)h_0 \, , \, y(.,T,\lambda,\tau) >_{L^2(\Omega)}$, where $\pi = \psi^*(\psi\psi^*)^{-1}\psi$ is the orthogonal projection of $L^2(\Omega)$ on vect$\{\Phi(\hat{y}_1),...,\Phi(\hat{y}_M)\}$ and Φ (resp. ψ) is defined by (7) (resp. (8)). Moreover, the "pollution term" $\hat{\xi}$ is not stealthy for the sentinel defined by $\Lambda\hat{\xi}$, where Λ is defined by (11).*

• **Arbitrary missing terms**

Now, we consider the system (13), where the "missing term" $\hat{y}$ is arbitrary in $L^2(\Omega)$. The hypothesis (H-2) and (H-3) are replaced respectively by

(H-2') : The solution y of (13) is available on $\mathcal{O}\times]0,T[$, where $\mathcal{O}$ is a subdomain of Ω.

(H-3') : The conditions of Mizohata's theorem [7, 8] are satisfied for the operator $\frac{\partial}{\partial t} + A(t) + f'(\overline{y})$ in $\Omega\times]0,T[$, where $\overline{y}$ is the solution of (1) with $\lambda = \tau_i = 0, 1 \leqslant i \leqslant M$.

For h_0 given in $L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)$, the sentinel defined by h_0 is the function $S(\lambda,\tau)$, defined by (14), such that (15)-(16) are satisfied. Then, we have the following result

THEOREM 0.2. – *Consider the system (13), the sentinel defined by h_0 is given by $S(\lambda,\tau) =< (id_{L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)} - \pi)h_0 \, , \, y(x,t,\lambda,\tau) >_{L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)}$, where $\pi = \tilde{\Phi}(\tilde{\Phi}^*\tilde{\Phi})^{-1}\tilde{\Phi}^*$ is the orthogonal projection of $L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)$ on $Im\,\tilde{\Phi}$, and $\tilde{\Phi}$ is defined in subsection 2.1. Assume that $\hat{\xi}$ vanishes on $(\Omega\setminus\overline{\mathcal{S}})\times]0,T[$, where $\mathcal{S}$ is a subdomain of Ω such that $\mathcal{S}\cap\mathcal{O}=\emptyset$. If $\hat{\xi}$ is stealthy for the sentinels defined by a complete family of $L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)$, then $\hat{\xi} = \partial_t z + Az + f'(\overline{y})z$, where z vanishes in $(\Omega\setminus\overline{\mathcal{S}})\times]0,T[$.*

---

1. Cas des termes manquants non arbitraires

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ régulière. On considère le système parabolique

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) + A(t)y(x,t) + f(y(x,t)) = g(x,t) & \text{dans} \quad Q = \Omega\times]0,T[\\ y(x,t) = \xi(x,t) + \lambda\hat{\xi}(x,t) & \text{sur} \quad \Sigma = \partial\Omega\times]0,T[\\ y(x,0) = y_0(x) + \sum_{i=1}^{i=M}\tau_i\hat{y}_i(x) & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{1}$$

où :

• $A(t)$ désigne un opérateur différentiel elliptique du deuxième ordre, pour t dans $]0,T[$.

• La fonction $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une application dérivable (non linéaire).

• La fonction g est dans $L^2(Q)$.

• Les fonctions ξ et $\hat{\xi}$ sont dans $L^2(\Sigma)$.

• Les fonctions y_0 et $\{\hat{y}_i\},\ i=1,2,...,M$ sont dans $L^2(\Omega)$.

On se place dans la situation suivante :

• Les paramètres λ et $\tau=(\tau_i)_{i\in\{1,...,M\}}$ sont inconnus et vérifient : $|\lambda| << 1$ et $|\tau_i| << 1$ pour $i\in\{1,...,M\}$.

• La fonctions $\hat{\xi}$ est inconnue et vérifie : $||\hat{\xi}||_{L^2(\Sigma)} \leqslant 1$.

• La famille $\{\hat{y}_i\},\ i=1,2,...,M$, qui est donnée, est linéairement indépendante dans $L^2(\Omega)$.

Les hypothèses que l'on fait ici sont les suivantes :

(H-1) : Le problème (1) possède un solution unique, différentiable par rapport aux paramètres λ et τ.

(H-2) : On dispose de la solution $y(x,T,\lambda,\tau)$ de (1) sur tout Ω mais à l'instant final T seulement.

Pour une fonction h_0 donnée dans $L^2(\Omega)$, la sentinelle définie par h_0 [3, 4] est la fonction

$$S(\lambda,\tau)=\int_\Omega (h_0(x)+w(x))y(x,T,\lambda,\tau)\,dx \tag{2}$$

où la fonction $w\in L^2(\Omega)$ est à déterminer de manière que :

$$\frac{\partial S}{\partial \tau_i}(0,0)=0,\ \text{pour } i\in\{1,2,...,M\} \tag{3}$$

et

$$||w||_{L^2(\Omega)}\ \text{ minimale.} \tag{4}$$

La condition (3) est équivalente à

$$< h_0+w, \frac{\partial y}{\partial \tau_i}(.,T,0,0) >= 0 \text{ pour } i\in\{1,2,...,M\} \tag{5}$$

où $<,>$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. Le système vérifié par $\frac{\partial y}{\partial \tau_i}$ pour $\tau=\lambda=0$ est

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}+A(t)u+f'(\overline{y})u=0 & \text{dans} \quad Q=\Omega\times]0,T[\\ u=0 & \text{sur} \quad \Sigma=\partial\Omega\times]0,T[\\ u(x,0)=\hat{y}_i & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{6}$$

où $\overline{y}$ est la solution de (1) avec $\tau=\lambda=0$. On fait l'hypothèse :
(H-3) : Les conditions du théorème d'unicité rétrograde [6, 2] sont vérifiées pour l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}+A(t)+f'(\overline{y})$ dans $\Omega\times]0,T[$.
On introduit l'opérateur linéaire

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & L^2(\Omega) & \rightarrow & L^2(\Omega) \\ & u_0 & \mapsto & u(.,T) \end{array} \tag{7}$$

où u est la solution de (6) de condition initiale u_0. Le théorème d'unicité rétrograde [6, 2] montre que l'opérateur Φ est injectif. La condition (3) est donc équivalente à $< h_0+w,\Phi(\hat{y}_i) >= 0$, pour tout $i\in\{1,2,...,M\}$. En posant $W=\text{vect}\{\Phi(\hat{y}_1),...,\Phi(\hat{y}_M)\}$, la condition (3) est équivalente à $w\in\{-h_0\}+W^\perp$. Le problème (3)-(4) peut s'écrire alors :

Trouver w, de norme minimale, dans le sous-espace affine $\{-h_0\}+W^\perp$.

Ce problème possède évidemment une solution unique $\overline{w}$ dans $\overline{W}=W$; cette solution n'est autre que la projection orthogonale de $-h_0$ sur W.

1.1. Opérateur de projection et furtivité

On écrit $\overline{w}=\sum_{i=1}^M \alpha_i\Phi(\hat{y}_i)$ où $\alpha=(\alpha_i)_{i=1,..,M}$ est à déterminer. Soit l'opérateur

$$\begin{array}{cccc} \Psi: & L^2(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}^M \\ & h & \longmapsto & (< h,\Phi(\hat{y}_i) >)_{i\in\{1,2,...,M\}}, \end{array} \tag{8}$$

dont l'opérateur adjoint est

$$\begin{array}{llll} \Psi^* : & \mathbb{R}^M & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ & (\beta_1, ..., \beta_M) & \longmapsto & \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(\hat{y}_i). \end{array} \tag{9}$$

On vérifie aisément que $\Psi\Psi^*\alpha = -\Psi h_0$ et que $\Psi\Psi^*$ est une matrice, de $\mathcal{M}_M(\mathbb{R})$, symétrique définie positive dont les termes sont donnés par $(\Psi\Psi^*)ij =< \Phi(\hat{y}_i), \Phi(\hat{y}_j) >, \ i, j \in \{1, 2, ..., M\}$. D'où

$$\overline{w} = -\Psi^*(\Psi\Psi^*)^{-1}\Psi h_0,$$

et $\pi = \Psi^*(\Psi\Psi^*)^{-1}\Psi$ est la projection cherchée. La sentinelle définie par h_0 est donc

$$S(\lambda, \tau) =< (id_{L^2(\Omega)} - \pi)h_0, y(., T, \lambda, \tau) > .$$

Cette formule permet de donner des informations sur le terme $\lambda\hat{\xi}$ quand ce dernier n'est pas furtif [3, 4]pour la-dite sentinelle.

On sait que $S(\lambda, \tau) \simeq S(0, 0) + \lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0, 0)$, c'est à dire que $< (id_{L^2(\Omega)} - \pi)h_0, y(., T, \lambda, \tau) - \overline{y}(., T) > \simeq \lambda < (id_{L^2(\Omega)} - \Pi)h_0, \frac{\partial y}{\partial \lambda_k}(., T, 0, 0) >$, où $\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, t, 0, 0)$ est la solution du système

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u + f'(\overline{y})u = 0 & \text{dans} & Q = \Omega\times]0, T[\\ u = \hat{\xi} & \text{sur} & \Sigma = \partial\Omega\times]0, T[\\ u(x, 0) = 0 & \text{dans} & \Omega \end{array} \right. \tag{10}$$

Soit l'opérateur

$$\begin{array}{llll} \Lambda : & L^2(\Sigma) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ & \eta & \longmapsto & u(., T), \end{array} \tag{11}$$

où u est la solution de (10) avec $u_{|\Sigma} = \eta$. Le terme $\hat{\xi}$ est furtif pour la sentinelle définie par h_0 si, et seulement si, $< (id_{L^2(\Omega)} - \pi)h_0, \Lambda\hat{\xi} >= 0$.

On a $Im\Phi \cap Im\Lambda = \{0_{L^2(\Omega)}\}$, sinon il existerait $\hat{y} \in L^2(\Omega)$ et $\hat{\eta} \in L^2(\Sigma)$, non identiquement nuls (théorème d'unicité rétrograde), tels que la solution de

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial z}{\partial t} + A(t)z + f'(\overline{y})z = 0 & \text{dans} & Q = \Omega\times]0, T[\\ z = \hat{\eta} & \text{sur} & \Sigma = \partial\Omega\times]0, T[\\ z(x, 0) = -\hat{y} & \text{donnée dans} & \Omega \end{array} \right. \tag{12}$$

vérifie $z(., T) \equiv 0$. D'où la contradiction, toujours d'après le théorème d'unicité rétrograde. Notons que pour $h_0 = \Lambda\hat{\xi}$ on a $< (id_{L^2(\Omega)} - \pi)h_0, \Lambda\hat{\xi} >= ||(id_{L^2(\Omega)} - \pi)\Lambda\hat{\xi}||^2 \neq 0$. D'où :

THÉORÈME 1.1. – *On considère le système (1), alors la sentinelle définie par h_0 est donnée par $S(\lambda, \tau) =< (id_{L^2(\Omega)} - \pi)h_0 , y(., T, \lambda, \tau) >_{L^2(\Omega)}$, où $\pi = \psi^*(\psi\psi^*)^{-1}\psi$ est la projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur vect$\{\Phi(\hat{y}_1), ..., \Phi(\hat{y}_M)\}$. En outre, le "terme de pollution" $\hat{\xi}$ n'est pas furtif pour la sentinelle définie par $\Lambda\hat{\xi}$.*

2. Cas des termes manquants arbitraires

Soit, avec les même notations, le système

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) + A(t)y(x,t) + f(y(x,t)) = \xi(x,t) + \lambda\hat{\xi}(x,t) & \text{dans} \quad Q = \Omega\times]0,T[\\ y(x,t) = 0 & \text{sur} \quad \Sigma = \partial\Omega\times]0,T[\\ y(x,0) = y_0(x) + \tau\hat{y}(x) & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{13}$$

où ξ, $\hat{\xi}$ sont dans $L^2(Q)$ et y_0, $\hat{y}$ sont dans $L^2(\Omega)$. On suppose que l'observation réalisée est : $y\chi_{\mathcal{O}}$ où $\chi_{\mathcal{O}}$ est l'indicatrice de $\mathcal{O}$. Comme précédemment, pour une fonction h_0 donnée dans $L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)$, la sentinelle définie par h_0 est la fonction

$$S(\lambda,\tau) = \int\int_{\mathcal{O}\times]0,T[} (h_0(x,t) + w(x,t))y(x,t,\lambda,\tau)\,dx\,dt \tag{14}$$

où la fonction $w \in L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)$ est à déterminer de sorte que :

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}S(0,0) = 0,\ \forall \hat{y} \in L^2(\Omega) \tag{15}$$

et

$$||w||_{L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)} \text{ minimale}. \tag{16}$$

Le système vérifié par $\frac{\partial y}{\partial t}$ pour $\tau = \lambda = 0$ est

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u + f'(\overline{y})u = 0 & \text{dans} \quad Q = \Omega\times]0,T[\\ u = 0 & \text{sur} \quad \Sigma = \partial\Omega\times]0,T[\\ u(x,0) = \hat{y} & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{17}$$

où $\overline{y}$ est la solution de (13) avec $\tau = \lambda = 0$. L'hypothèse (H-3) du premier cas est remplacée par une hypothèse similaire :
(H-3') : Les conditions du théorème de Mizohata [7, 8] sont satisfaites.
On introduit l'opérateur linéaire

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & L^2(\Omega) & \rightarrow & L^2(\mathcal{O}\times]0,T[) \\ & u(.,0) & \mapsto & u_{|\mathcal{O}\times]0,T[} \end{array} \tag{18}$$

où u est la solution de (17) de condition initiale $u(.,0)$. L'opérateur Φ est injectif, d'après le théorème de Mizohata, et son opérateur adjoint Φ^* est donné par

$$\begin{array}{cccc} \Phi^* : & L^2(\mathcal{O}\times]0,T[) & \rightarrow & L^2(\Omega) \\ & \theta & \mapsto & v(.,0) \end{array} \tag{19}$$

où v est la solution du problème parabolique adjoint

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + A^*(t)v + f'(\overline{y})v = \theta\chi_{\mathcal{O}} & \text{dans} \quad Q = \Omega\times]0,T[\\ v = 0 & \text{sur} \quad \Sigma = \partial\Omega\times]0,T[\\ v(x,T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{20}$$

où $v(.,0)$ vérifie la condition $< \theta, u >_{L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)} = < v(.,0), \hat{y} >_{L^2(\Omega)}$. La condition (15) équivaut $< v(.,0), \hat{y} >_{L^2(\Omega)} = 0$, pour tout $\hat{y} \in L^2(\Omega)$, *i.e.*, $v(.,0) = \Phi^*(h_0 + w) \equiv 0$. Le problème (15)-(16) est donc équivalent à

$$(\mathcal{P}) : \quad \text{Trouver } w \in L^2(\mathcal{O}\times]0,T[) \text{ de norme minimale telle que } \Phi^*(h_0 + w) \equiv 0.$$

Notons que $\Phi^*(h_0 + w) = 0$ équivaut w est dans le sous-espace affine (fermé) : $\{-h_0\} + (Im\Phi)^{\perp}$. Le problème $(\mathcal{P})$ possède une solution unique $\overline{w}$ dans $\overline{Im\Phi}$ qui n'est autre que la projection orthogonale de $-h_0$ sur $\overline{Im\Phi}$, (cette solution n'est pas forcément atteinte par Φ comme dans le premier cas).

2.1. Opérateur de projection et furtivité

L'application $||| \ \ |||$ définie de $L^2(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^+$ par $|||y||| = ||\Phi(y)||_{L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)}$ est une norme et Φ est évidemment continue de $(L^2(\Omega), ||| \ \ |||)$ vers $(L^2(\mathcal{O}\times]0,T[), || \ \ ||_{L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)})$. On désignera par F le complété de $L^2(\Omega)$ pour la norme $||| \ \ |||$, par $\tilde{\Phi}$ l'unique prolongement (par continuité) de Φ à F et par $\tilde{\Phi}^*$ l'adjoint de $\tilde{\Phi}$.

Posons $\overline{w} = \tilde{\Phi}(\overline{u})$. On a $< \overline{w}, w >_{L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)} = - < h_0, w >_{L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)}$ pour tout $w \in \overline{Im\Phi}$, ce qui équivaut $< \tilde{\Phi}\overline{u}, \tilde{\Phi}y >_{L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)} = - < h_0, \tilde{\Phi}y >_{L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)}$ pour tout $y \in F$. D'où, $\tilde{\Phi}^*\tilde{\Phi}\overline{u} = -\tilde{\Phi}h_0$. D'autre part, la forme bilinéaire :

$$\begin{array}{rccl} b: & F\times F & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & < \tilde{\Phi}u, \tilde{\Phi}v >_{L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)} \end{array}$$

est continue et définie positive, donc l'opérateur (associé) $\tilde{\Phi}^*\tilde{\Phi}$ est un isomorphisme de F vers son dual F'. D'où, $\overline{w} = -\tilde{\Phi}(\tilde{\Phi}^*\tilde{\Phi})^{-1}\tilde{\Phi}^* h_0$ où $\pi = \tilde{\Phi}(\tilde{\Phi}^*\tilde{\Phi})^{-1}\tilde{\Phi}^*$ est la projection cherchée.

Le système vérifiée par $\frac{\partial y}{\partial \lambda}$, pour $\lambda = \tau = 0$, est

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial t} + Au + f'(\overline{y})u = \hat{\xi} & \text{dans} & Q = \Omega\times]0,T[\\ u = 0 & \text{sur} & \Sigma = \partial\Omega\times]0,T[\\ u(x,0) = 0 & \text{dans} & \Omega \end{array} \right. \tag{21}$$

Soit l'opérateur

$$\begin{array}{rccl} \Lambda: & L^2(\mathcal{O}\times]0,T[) & \longrightarrow & L^2(\mathcal{O}\times]0,T[) \\ & \theta & \longmapsto & v_{|_{L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)}} \end{array} \tag{22}$$

où v est la solution de (20). On a $< h_0 + \overline{w}\, , \dfrac{\partial y}{\partial \lambda} >_{L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)} = < \hat{\xi}\, , \Lambda(h_0 + \overline{w}) >_{L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)}$. Le terme $\hat{\xi}$ est donc furtif pour la sentinelle définie par h_0 si, et seulement si, $< h_0 + \overline{w}\, , \frac{\partial y}{\partial \lambda} >_{L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)} = 0$, c'est à dire $< h_0 + \overline{w}\, , \Lambda\hat{\xi} >_{L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)} = 0$.

Supposons que le terme $\hat{\xi}$ est furtif pour les sentinelles définies par une famille complète de $L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)$, alors $\Lambda\hat{\xi} \in Im\tilde{\Phi}$. Il existe alors $u_0 \in F$ tel que $\tilde{\Phi}u_0 = \Lambda\hat{\xi}$. Ainsi, la solution du système

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial t} + Au + f'(\overline{y})u = \hat{\xi} & \text{dans} & Q = \Omega\times]0,T[\\ u = 0 & \text{sur} & \Sigma = \partial\Omega\times]0,T[\\ u(x,0) = -u_0(x) & \text{dans} & \Omega \end{array} \right. \tag{23}$$

est nulle sur $\mathcal{O}\times]0,T[$. Or, la situation intéressante est lorsque l'observatoire $\mathcal{O}$ et le "support" du terme de pollution $\hat{\xi}$ sont disjoints. On désigne par l'ouvert $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S} \subset \Omega,\ \mathcal{S}\cap\mathcal{O} = \emptyset$) le "support" de $\hat{\xi}$. Le théorème de Mizohata [7, 8] appliqué à (21) sur l'ouvert $\Omega\setminus\overline{\mathcal{S}}$ entraîne que $\hat{\xi}$ vérifie :

$$\partial_t z + Az + f'(\overline{y})z = \hat{\xi},$$

où z est nulle sur $(\Omega \setminus \overline{\mathcal{S}})\times]0,T[$. D'où

THÉORÈME 2.1. – *On considère le système (13). La sentinelle définie par h_0 est donnée par $S(\lambda,\tau) =< (id_{L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)} - \pi)h_0\ ,\ y(x,t,\lambda,\tau) >_{L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)}$ où $\pi = \tilde{\Phi}(\tilde{\Phi}^*\tilde{\Phi})^{-1}\tilde{\Phi}^*$ est la projection orthogonale de $L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)$ sur $Im\ \tilde{\Phi}$. Supposons que le terme de "pollution" $\hat{\xi}$ est concentré dans $\mathcal{S}\times]0,T[$, où $\mathcal{S}$ est un ouvert de Ω, disjoint de $\mathcal{O}$. Si le terme $\hat{\xi}$ est furtif pour les sentinelles définies une famille complète de $L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)$, alors $\hat{\xi} = \partial_t z + Az + f'(\overline{y})z$, où z est nulle sur $(\Omega \setminus \overline{\mathcal{S}})\times]0,T[$.*

Références bibliographiques

[1] Ainseba B.E., Kernevez J. P., Luce R., Identification de paramètres dans les problèmes non linéaires a données incomplètes, RAIRO, Modelisation Math. Anal. Numer. 28, No.3, (1994) 313-328.

[2] Bardos C., Tartar L., Sur l'unicité rétrograde des équations paraboliques et quelques questions voisines, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 50, Springer Verlag, (1973) 10-25.

[3] Lions J. L., Sentinelles pour les systèmes distribués, (1992) Masson.

[4] Lions J. L., Sur les sentinelles des systèmes distribués, C.R.A.S., 307, (1988) 819-823.

[5] Lions J. L., Contrôle optimal des systèmes gouvernés pas des équations aux dérivées partielles, Dunod, Paris, 1968.

[6] Lions J. L., Malgrange B., Sur l'unicité rétrograde dans les problèmes mixtes paraboliques, Math. Scand., 8, (1960) 277-286.

[7] Mizohata Z., Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques, Mem Coll. Sc. Univ. Kyoto, Série A, 31, (1958) 219-239.

[8] Saut J. C., Scheurer B., Unique continuation for some evolution equations, Journal of Differential Equations, 66, (1987) 118-139.

Liste des prépublications

99-1 Monique Jeanblanc et Nicolas Privault. A complete market model with Poisson and Brownian components. A paraître dans *Proceedings of the Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications*, Ascona, 1999.

99-2 Laurence Cherfils et Alain Miranville. Generalized Cahn-Hilliard equations with a logarithmic free energy. A paraître dans *Revista de la Real Academia de Ciencias*.

99-3 Jean-Jacques Prat et Nicolas Privault. Explicit stochastic analysis of Brownian motion and point measures on Riemannian manifolds. *Journal of Functional Analysis* **167** (1999) 201-242.

99-4 Changgui Zhang. Sur la fonction q-Gamma de Jackson. A paraître dans *Aequationes Math.*

99-5 Nicolas Privault. A characterization of grand canonical Gibbs measures by duality. A paraître dans *Potential Analysis*.

99-6 Guy Wallet. La variété des équations surstables. A paraître dans *Bulletin de la Société Mathématique de France*.

99-7 Nicolas Privault et Jiang-Lun Wu. Poisson stochastic integration in Hilbert spaces. *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, **6** (1999) 41-61.

99-8 Augustin Fruchard et Reinhard Schäfke. Sursabilité et résonance.

99-9 Nicolas Privault. Connections and curvature in the Riemannian geometry of configuration spaces. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **330** (2000) 899-904.

99-10 Fabienne Marotte et Changgui Zhang. Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique. A paraître dans *Annales de l'Institut Fourier*, 2000.

99-11 Knut Aase, Bernt Øksendal, Nicolas Privault et Jan Ubøe. White noise generalizations of the Clark-Haussmann-Ocone theorem with application to mathematical finance. *Finance and Stochastics*, **4** (2000) 465-496.

00-01 Eric Benoît. Canards en un point pseudo-singulier nœud. A paraître dans *Bulletin de la Société Mathématique de France*.

00-02 Nicolas Privault. Hypothesis testing and Skorokhod stochastic integration. *Journal of Applied Probability*, **37** (2000) 560-574.

00-03 Changgui Zhang. La fonction théta de Jacobi et la sommabilité des séries entières q-Gevrey, I. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **331** (2000) 31-34.

00-04 Guy Wallet. Déformation topologique par changement d'échelle.

00-05 Nicolas Privault. Quantum stochastic calculus for the uniform measure and Boolean convolution. A paraître dans *Séminaire de Probabilités* **XXXV**.

00-06 Changgui Zhang. Sur les fonctions q-Bessel de Jackson.

00-07 Laure Coutin, David Nualart et Ciprian A. Tudor. Tanaka formula for the fractional Brownian motion. A paraître dans *Stochastic Processes and their Applications*.

00-08 Nicolas Privault. On logarithmic Sobolev inequalities for normal martingales. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* **9** (2000) 509-518.

01-01 Emanuelle Augeraud-Veron et Laurent Augier. Stabilizing endogenous fluctuations by fiscal policies ; Global analysis on piecewise continuous dynamical systems. A paraître dans *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*

01-02 Delphine Boucher. About the polynomial solutions of homogeneous linear differential equations depending on parameters. A paraître dans *Proceedings of the 1999 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation : ISSAC 99, Sam Dooley Ed., ACM, New York 1999*.

01-03 Nicolas Privault. Quasi-invariance for Lévy processes under anticipating shifts.

01-04 Nicolas Privault. Distribution-valued iterated gradient and chaotic decompositions of Poisson jump times functionals.

01-05 Christian Houdré et Nicolas Privault. Deviation inequalities : an approach via covariance representations.

01-06 Abdallah El Hamidi. Remarques sur les sentinelles pour les systèmes distribués