



Prépublications du Département de Mathématiques

Université de La Rochelle
Avenue Marillac
17042 La Rochelle Cedex 1
<http://www.univ-lr.fr/labo/lmca>

Equations différentielles et familles bien nées de courbes planes.

Rachid Bebbouchi et E. Benoît

Juin 2002

Classification : 34A99

Mots clés : Equations différentielles - Feuilletages - Enveloppes - Familles de courbes - Algorithme d'Euler

2002/02

Equations différentielles et familles bien nées de courbes planes.*

Rachid Bebbouchi[†] Eric Benoît[‡]

14 juillet 2002

Introduction

Ce travail répond à une question posée par G. REEB en août 1980. Il s'agit de savoir si les solutions d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre peuvent toujours être décrites à l'aide d'une famille à un paramètre de fonctions. On verra que ce problème est intéressant quand l'équation a un défaut d'unicité important, c'est-à-dire quand elle a beaucoup de points de branchement.

Dans le paragraphe 1, on définira les familles à un paramètre à considérer. Dans le paragraphe 2, on énoncera les résultats principaux, et on tentera d'expliquer les problèmes qui peuvent apparaître. Dans le paragraphe 3, on démontrera que toute famille bien née décrit l'ensemble des solutions d'une équation, et dans les deux paragraphes suivants, on démontrera que l'ensemble des solutions d'une équation est décrit par une famille bien née, tout d'abord dans le cas particulier des équations bornées (paragraphe 4), puis dans le cas général des équations complètes (paragraphe 5).

Bien que le résultat soit standard, nous en donnerons une démonstration non standard (voir [DR89] pour une introduction à l'analyse non standard). En effet, nous remplacerons les solutions d'une équation différentielle par les fonctions affines par morceaux produites par l'algorithme d'Euler, et le cadre non standard permet de prendre un pas ε infiniment petit fixé une fois pour toutes. Le choix (bien évidemment non constructif) de ε permet de remplacer l'utilisation de l'axiome du choix qui serait sans doute inévitable dans une démonstration classique.

On a regroupé dans le paragraphe 6 quelques résultats indispensables de topologie non standard.

*Ce travail a été élaboré grâce au soutien de l'accord-programme CMEP "Méthodes asymptotiques" 00MDU484.

[†]USTHB, ALGER, email : rbebbouchi@hotmail.com

[‡]Laboratoire de mathématiques, Université de la Rochelle, avenue Michel Crépeau, 17042 LA ROCHELLE, email : ebenoit@univ-lr.fr

1 Famille bien née de courbes planes

Définition 1 On appelle famille bien née de courbes planes une famille de courbes définie par l'équation $y = \varphi(\lambda, x)$, où λ est un paramètre réel, et telle que

- i. φ est continue sur \mathbb{R}^2 ,
- ii. Pour x fixé, l'application $\lambda \mapsto \varphi(\lambda, x)$ est croissante (en général non strictement).
- iii. Si pour tout x , on a $\varphi(\lambda, x) = \varphi(\mu, x)$, alors $\lambda = \mu$.
- iv. Pour tout x fixé dans \mathbb{R} , la fonction $\lambda \mapsto \varphi(\lambda, x)$ est surjective.
- v. La dérivée partielle $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ est définie et continue sur \mathbb{R}^2 .

Cette définition appelle trois remarques :

Remarques

1. Par tout point du plan passe au moins une courbe de la famille (conséquence de *iv*).
2. Si deux courbes de la famille passent par un même point, elles y ont même tangente (corollaire de la condition *ii* et de la dérivabilité : si deux courbes de paramètres λ_1 et λ_2 , avec $\lambda_1 < \lambda_2$, se rencontrent en un point, ce point réalise un minimum de la fonction $\varphi(\lambda_2, x) - \varphi(\lambda_1, x)$).
3. Il sera parfois commode de considérer l'application $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{C}$, où \mathcal{C} est l'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{R} , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, et de l'ordre partiel naturel. Cet ensemble est étudié dans le paragraphe 6. L'application φ associe à tout λ réel la fonction $x \rightarrow \varphi(\lambda, x)$. Elle est continue, strictement croissante.

Définition 2 On appelle enveloppe d'une famille bien née de courbes planes une courbe tangente en chacun de ses points à une courbe de la famille passant par ce point.

En particulier, toute courbe de la famille est une enveloppe. Remarquons que, bien que les éléments de la famille bien née soient tous définis sur \mathbb{R} , il se peut qu'une enveloppe ait une asymptote verticale (un exemple sera donné plus loin) : le caractère *complet* (au sens des champs de vecteurs) de la famille $\varphi(\lambda, x)$ ne se transmet pas nécessairement aux enveloppes.

2 Résultats et commentaires

2.1 Résultats

Les deux théorèmes que nous allons démontrer dans les paragraphes 3 à 5 sont les suivants :

Théorème 1 Les enveloppes d'une famille bien née constituent la totalité des solutions d'une équation différentielle $y' = \psi(x, y)$ où ψ est continue.

Théorème 2 Soit ψ une fonction continue de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . On suppose que toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = \psi(x, y)$ sont prolongeables sur \mathbb{R} tout entier. Alors il existe une famille bien née de solutions de l'équation et le théorème 1 s'applique.

Le premier théorème n'est ni surprenant, ni très difficile ; c'est le second qui est l'objet essentiel de ce papier.

Avant de démontrer les théorèmes, nous allons donner quelques exemples pour comprendre les problèmes qui peuvent se présenter :

2.2 Non unicité de la famille

La famille bien née dont le théorème 2 assure l'existence n'est, en général, pas unique. Voici un exemple :

Pour l'équation différentielle $y' = 3y^{2/3}$ (voir [Cau81]), on trouve facilement deux familles bien nées différentes : $\varphi(\lambda, x) = (x + \lambda)^3$, et, si a et b désignent deux constantes telles que $a < b$, la famille :

$$\varphi(\lambda, x) = \begin{cases} (x + \lambda - a)^3 & \text{si } x \leq a - \lambda \\ 0 & \text{si } a - \lambda \leq x \leq b - \lambda \\ (x + \lambda - b)^3 & \text{si } b - \lambda \leq x \end{cases} \quad (1)$$

2.3 Complétude de la famille ou de l'équation ?

Dans certains cas, une équation, même obtenue à partir d'une famille bien née, peut avoir des solutions ayant des singularités mobiles. En effet, une famille bien née peut avoir des enveloppes non définies sur \mathbb{R} tout entier. Dans cette situation, les hypothèses du théorème 2 ne sont pas vérifiées. Les situations où le théorème 1 s'applique sont donc un peu plus générales que celles du théorème 2. Donnons un exemple : soit

$$h(\mu, x) = \frac{3x^2\mu - 3x\mu^2 + \mu^3 + 3x}{3x^2 + 1}. \quad \text{On a } \frac{\partial h}{\partial \mu} = \frac{3(x - \mu)^2}{3x^2 + 1}.$$

Cette fonction est choisie pour les propriétés suivantes :

$$\frac{\partial h}{\partial \mu} \geq 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \mu} = 0 \Leftrightarrow x = \mu, \quad h(-1, x) = -1 \quad \text{et} \quad h(1, x) = 1.$$

C'est donc une famille croissante à un paramètre $\mu \in]-1, 1[$ remplissant la bande $-1 < h < 1$, et ayant une enveloppe d'équation paramétrique $x = \mu$, $h = \frac{\mu(\mu^2 + 3)}{3\mu^2 + 1}$, définie pour $\mu \in]-1, 1[$. Pour transformer cette famille en une famille bien née, il suffit de faire un changement de variable et de paramètre pour remplacer $h \in]-1, 1[$ par $\varphi \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\varphi(\lambda, x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}h\left(\frac{2}{\pi}\arctan \lambda, x\right)\right).$$

Cette famille bien née a pour enveloppe la courbe

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{x(x^2 + 3)}{3x^2 + 1}\right)$$

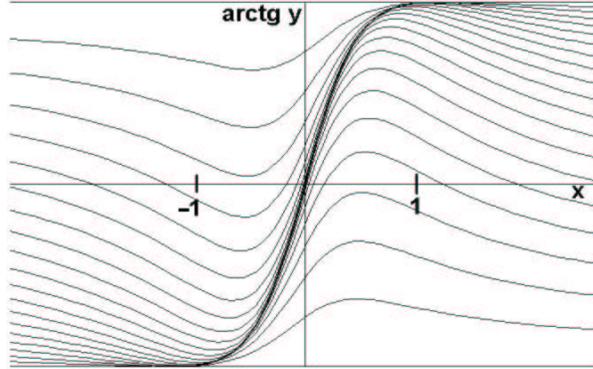


Figure 1 – Une famille bien née ayant une enveloppe définie seulement sur $] -1, 1[$.

définie seulement pour $x \in] -1, 1[$. Cette enveloppe est aussi une solution maximale de l'équation différentielle correspondante :

$$y' = \frac{3(1 + y^2) \left(\pi - \pi^{\frac{1}{3}} (2 \arctan y - 3\pi x + 6x^2 \arctan y - \pi x^3)^{\frac{2}{3}} + \pi x^2 - 4x \arctan y \right)}{2(3x^2 + 1)}$$

obtenue par élimination de μ , comme dans la preuve du théorème 1.

2.4 Contre-exemple avec une équation non complète

Pour comprendre pourquoi le théorème 2 exige l'hypothèse de complétude, considérons l'exemple suivant :

$$\psi(x, y) = -2xy^2 .$$

Les solutions non prolongeables de l'équation $y' = \psi(x, y)$ sont les fonctions

$$\begin{cases} 1/(x^2 - C) & \text{pour } C > 0 & \text{et } -\sqrt{C} < x < \sqrt{C} \\ 0 & & \\ 1/(x^2 - C) & \text{pour } C < 0 & \\ 1/(x^2 - C) & \text{pour } C \geq 0 & \text{et } x < -\sqrt{C} \\ 1/(x^2 - C) & \text{pour } C \geq 0 & \text{et } x > \sqrt{C} . \end{cases}$$

L'ensemble de ces solutions est homéomorphe à un \mathbf{Y} c'est-à-dire le quotient de la réunion de deux exemplaires disjoints de \mathbb{R} par la relation d'équivalence consistant à identifier les réels strictement négatifs des deux exemplaires. C'est une variété non séparée, avec un point de branchement : les 0 des deux exemplaires de \mathbb{R} qui correspondent aux solutions $y = 1/x^2$ où $x < 0$, et $y = 1/x^2$ où $x > 0$. Il n'est donc pas possible de décrire cet ensemble à l'aide d'une famille à un paramètre croissante qui, elle, est un espace topologique homéomorphe à \mathbb{R} .

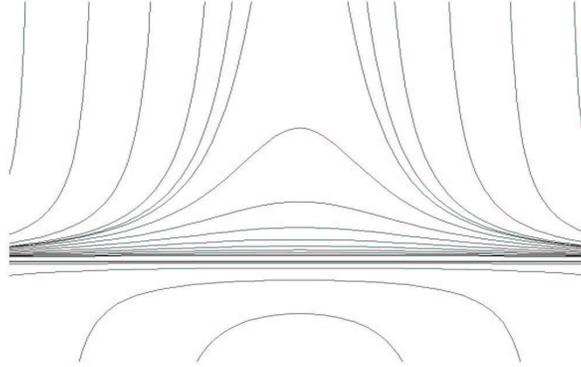


Figure 2 – Une équation non complète impossible à décrire par une famille bien née.

3 Preuve du théorème 1

Soit $y = \varphi(\lambda, x)$ la famille bien née. On va construire explicitement l'équation $y' = \psi(x, y)$ par une élimination de λ dans le système

$$\begin{cases} y &= \varphi(\lambda, x) \\ y' &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\lambda, x) \end{cases} .$$

Pour faire cela, introduisons l'application μ , définie sur \mathbb{R}^2 et à valeurs dans l'ensemble des parties de \mathbb{R} , par

$$\mu(x, y) = \{ \lambda \in \mathbb{R} \ , \ y = \varphi(\lambda, x) \} .$$

Pour l'exemple (1), on voit que

$$\mu(x, y) = \begin{cases} \{y^{1/3} - x + a\} & \text{si } y < 0 \\ [a - x, b - x] & \text{si } y = 0 \\ \{y^{1/3} - x + b\} & \text{si } y > 0 \end{cases} .$$

La condition *iv* de la définition 1 entraîne que, pour tout (x, y) , l'ensemble $\mu(x, y)$ est non vide. Les conditions *i* et *ii* montrent que $\mu(x, y)$ est un intervalle fermé. De plus, d'après la remarque 2 du paragraphe 1, la valeur de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\lambda, x)$ est la même pour tous les λ appartenant à $\mu(x, y)$. On note $\psi(x, y)$ cette valeur commune. L'application ψ est le résultat de l'élimination; comme elle est déterminée par un procédé constructif à partir d'objets standard, elle est elle-même standard. Par construction, elle vérifie

$$z = \psi(x, y) \iff \exists \lambda \ y = \varphi(\lambda, x) \quad \text{et} \quad z = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\lambda, x) .$$

Montrons que ψ est continue*. Comme toutes les données du problème peuvent être considérées comme standard, il suffit de montrer que ψ est S -continue. Soit

*On donne ici une démonstration non standard élémentaire de la continuité. Une démonstration classique utiliserait la semi-continuité de l'application μ .

(x_0, y_0) un point standard de \mathbb{R}^2 et (x, y) un point infiniment voisin de (x_0, y_0) . Il existe λ_0 et λ tels que $y_0 = \varphi(\lambda_0, x_0)$ et $y = \varphi(\lambda, x)$. Par transfert, la valeur de λ_0 peut être choisie standard. Le problème est que λ et λ_0 n'ont aucune raison d'être infiniment voisins. Supposons pour l'instant, que λ est presque standard. Alors, par continuité de φ , on a

$$y = \varphi(\lambda, x) \simeq \varphi({}^\circ\lambda, x_0) \quad \text{et} \quad y \simeq y_0 = \varphi(\lambda_0, x_0) \quad .$$

En conséquence les deux nombres standard $\varphi({}^\circ\lambda, x_0)$ et $\varphi(\lambda_0, x_0)$ sont égaux, et avec la remarque 2 ci-dessus, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}({}^\circ\lambda, x_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\lambda_0, x_0) \quad .$$

La continuité de $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ permet de conclure :

$$\psi(x, y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\lambda, x) \simeq \frac{\partial\varphi}{\partial x}({}^\circ\lambda, x_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\lambda_0, x_0) = \psi(x_0, y_0) \quad .$$

Il nous reste à montrer que le cas où λ est infiniment grand est impossible. Par l'absurde, supposons λ supérieur à tout réel standard μ . On a alors

$$y_0 \simeq y = \varphi(\lambda, x) > \varphi(\mu, x) \simeq \varphi(\mu, x_0) \quad .$$

Or $\mu \mapsto \varphi(\mu, x_0)$ est une application standard croissante et surjective, donc pour un μ standard suffisamment grand, la valeur de $\varphi(\mu, x_0)$ dépasse n'importe quel standard, en particulier $y_0 + 1$, ce qui est absurde.

4 Preuve du théorème 2 : le cas borné

On suppose dans tout ce paragraphe qu'il existe un réel M tel que $|\psi(x, y)| \leq M$ pour tous x et y .

Dans le cas où l'équation satisfait la propriété d'unicité des trajectoires, le théorème est trivial, mais si les points de non unicité forment un ensemble assez gros, la difficulté apparaît. Une démonstration classique n'éviterait sans doute pas l'usage de l'axiome du choix, pour *choisir* certaines des solutions (et pas toutes) afin de constituer la famille bien née. Remarquons que le caractère constructif de la preuve ci-dessous ne doit pas faire illusion : elle passe par la donnée d'un infinitésimal ε , opération non constructive par excellence.

Si les points de non unicité (ou points de Peano) se comportent comme ceux de l'équation $y' = |y|^s$, $0 < s < 1$, on sait que la fonction affine par morceaux obtenue par l'algorithme d'Euler de pas ε , de condition initiale $\varepsilon \exp(-\exp(\frac{p}{\varepsilon} \ln \frac{1}{s}))$, admet pour ombre la solution qui s'annule jusqu'au point p et décolle ensuite (voir [Beb85]). On a ainsi, au moins pour cet exemple, une famille bien née de quasi-solutions, indexée par la condition initiale. C'est là l'idée essentielle de la démonstration qui suit.

Remarquons que l'algorithme d'Euler est l'argument principal de la démonstration de l'existence des solutions d'une équation différentielle continue (de même que les solutions ε -approchées de H. Cartan). Dans la suite, nous serons obligés de modifier cet algorithme pour éviter que les pointillés ne se croisent.

Soit ε un réel infinitésimal positif fixé une fois pour toutes. A chaque condition initiale y_0 , on associe la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ obtenue par un algorithme d'Euler modifié :

$$\begin{cases} y_{n+1} = \sup_{y \leq y_n} (y + \varepsilon \psi(n\varepsilon, y)) & n \geq 0 \\ y_{n-1} = \sup_{y \leq y_n} (y - \varepsilon \psi(n\varepsilon, y)) & n \leq 0 \end{cases} .$$

Notation On notera \mathcal{C} l'espace des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Notation On notera \mathcal{L} le sous-espace de \mathcal{C} constitué des fonctions M -lipschitziennes sur \mathbb{R} , où M est le majorant de ψ .

Notons $P(y_0)$ la fonction affine par morceaux interpolant les points $(n\varepsilon, y_n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$. On obtient ainsi une application P définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans l'espace \mathcal{C} . Le lemme ci-dessous décrit cette application.

Lemme 4.1 *L'application P vérifie les propriétés suivantes :*

- i. *L'application P est à valeurs dans \mathcal{L} .*
- ii. *Soit n tel que $n\varepsilon$ soit limité. Alors $P(y_0)(n\varepsilon)$ est limité si et seulement si y_0 est limité.*
- iii. *Pour tout y_0 limité, la fonction $P(y_0)$ a une ombre qui est une solution de l'équation différentielle.*
- iv. *L'application P est strictement croissante.*
- v. *L'application P est continue.*
- vi. *Pour tout n , la fonction qui à y_0 associe $P(y_0)(n\varepsilon)$ est surjective.*

Preuve Elle n'est donnée que pour $n > 0$; une symétrie facile permet de faire le même travail pour $n < 0$.

- i. Comme ψ est bornée, on a, pour tout $y \leq y_n$ l'inégalité

$$y + \varepsilon \psi(n\varepsilon, y) \leq y_n + \varepsilon M,$$

d'où $y_{n+1} \leq y_n + \varepsilon M$. Pour la minoration, on a

$$y_{n+1} \geq y_n + \varepsilon \psi(n\varepsilon, y_n) \geq y_n - \varepsilon M.$$

Finalement, $|y_{n+1} - y_n| \leq \varepsilon M$ et $|y_q - y_p| \leq M(q\varepsilon - p\varepsilon)$ et l'application $P(y_0)$ est M -lipschitzienne pour tout y_0 .

- ii. C'est une conséquence immédiate de l'inégalité $|P(y_0)(n\varepsilon) - y_0| \leq n\varepsilon M$.
- iii. Tout d'abord, $P(y_0)(0) = y_0$ est limité, et la fonction $P(y_0)$ est M -lipschitzienne. Elle a donc une ombre M -lipschitzienne.

De plus, une estimation de $y_{n+1} - y_n$ plus précise que ci-dessus donne : pour tout y infiniment proche de y_n et inférieur à y_n , on a (ϕ désigne un réel infinitésimal) :

$$y + \varepsilon \psi(n\varepsilon, y) \leq y_n + \varepsilon(\psi(n\varepsilon, y_n) + \phi) .$$

Pour tout y inférieur à y_n mais non infiniment proche de y_n , on a

$$y + \varepsilon\psi(n\varepsilon, y) = y + \phi < y_n + \varepsilon\psi(n\varepsilon, y_n) .$$

On en déduit :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\varepsilon} \lesssim \psi(n\varepsilon, y_n) .$$

D'autre part, $y_{n+1} \geq y_n + \varepsilon\psi(n\varepsilon, y_n)$. On a donc pour finir :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\varepsilon} \simeq \psi(n\varepsilon, y_n) .$$

Les accroissements $y_{n+1} - y_n$ vérifient la condition indiquant que l'ombre de (y_n) est une solution de l'équation différentielle [DR89].

- iv.* Il est évident que $y_n < z_n$ implique $y_{n+1} \leq z_{n+1}$. Donc P est croissante. De plus P est évidemment injective, puisque $P(y_0)(0) = y_0$. Elle est donc strictement croissante.

Remarquons ici que la modification de l'algorithme d'Euler est vraiment nécessaire pour préserver la monotonie. Ainsi, par exemple, pour l'équation $y' = 3|y|^{2/3}$, l'algorithme original d'Euler, sans le sup, ne conserve pas la monotonie : pour $y_0 = 0$, il donnerait $y_1 = 0$ alors que pour $y_0 = -8\varepsilon^3$ il donnerait $y_1 = 4\varepsilon^3$. On remarquera que, toujours pour cet exemple, l'algorithme modifié choisit la plus grande des solutions passant par le point donné, mais ce n'est pas le cas pour des équations plus générales. (Ce choix de la solution la plus grande serait en contradiction avec les propriétés de continuité du lemme 4.1.v).

L'introduction de cette borne supérieure dans l'algorithme est la raison principale pour laquelle nous avons dû supposer que ψ est bornée. En effet, il se peut, si ψ n'est pas bornée, que la borne supérieure soit atteinte pour des y infiniment grands négatifs, ou même qu'elle soit infinie. Par exemple, pour l'équation $y' = y^2 \cos y$, dont toutes les solutions sont définies sur \mathbb{R} tout entier, la construction de la suite y_n donne toujours $y_1 = +\infty$ car, pour $y = -2k\pi$ infiniment grand négatif inférieur à $-\frac{2}{\varepsilon}$ au moins, on obtient $y + \varepsilon\psi(y) = y + \varepsilon y^2$ qui est infiniment grand positif.

- v.* Pour tout n , l'application qui à y_n associe y_{n+1} est continue. Donc, par composition, l'application qui à y_0 associe y_n est continue, même si $n\varepsilon$ est non limité. Donc, pour tout N (que $N\varepsilon$ soit limité ou non), la fonction qui à y_0 associe la restriction de la fonction affine par morceaux $P(y_0)$ à $[0, N\varepsilon]$ est continue pour la norme uniforme. La fonction P est donc bien continue, de \mathbb{R} vers l'ensemble des fonctions réelles continues muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Cependant, la fonction P n'est pas toujours S -continue : il se peut (quand il y a des points de non unicité) que deux valeurs infiniment voisines de y_0 donnent deux fonctions n'ayant pas même ombre.

- vi.* La fonction qui à y_0 associe $P(y_0)(n\varepsilon)$ est continue, et $|P(y_0)(n\varepsilon) - y_0| \leq n\varepsilon M$ donc la limite de $P(y_0)(n\varepsilon)$ quand y_0 tend vers $\pm\infty$ est respectivement $\pm\infty$.

■

En conclusion, les ombres des lignes $P(y_0)$ forment déjà une famille croissante de solutions; cependant, y_0 ne peut pas servir de paramètre pour cette famille, à cause du défaut de S -continuité. On va donc reparamétriser cette famille :

Notation Notons \mathcal{F} l'ensemble image de l'application P , et ${}^\circ\mathcal{F}$ son ombre (voir paragraphe 6 définition 6).

Le problème est donc de décrire ${}^\circ\mathcal{F}$ par une paramétrisation raisonnable. Dans ce but, on va étudier plus précisément l'ensemble ${}^\circ\mathcal{F}$.

Lemme 4.2 *Propriétés de ${}^\circ\mathcal{F}$:*

- i. ${}^\circ\mathcal{F}$ est inclus dans \mathcal{C} .
- ii. ${}^\circ\mathcal{F}$ est totalement ordonné, non vide.
- iii. ${}^\circ\mathcal{F}$ est connexe.
- iv. Les éléments de ${}^\circ\mathcal{F}$ sont des solutions de l'équation $y' = \psi(x, y)$.
- v. Tout point du plan appartient au graphe d'au moins un élément de ${}^\circ\mathcal{F}$.

Preuve i. La majoration de Lipschitz se transmet sans difficulté à l'ombre, \mathcal{C} est fermé dans \mathcal{C} .

ii. L'ensemble \mathcal{F} est l'image de \mathbb{R} par l'application P qui est strictement croissante, c'est donc un sous-ensemble de \mathcal{C} totalement ordonné. Son ombre est donc aussi totalement ordonnée (voir lemme 6.7). De plus, \mathcal{F} contient des éléments presque standard; son ombre est donc non vide.

iii. L'ensemble \mathcal{F} est l'image de \mathbb{R} par l'application continue P , il est donc connexe. De plus, il s'écrit comme la réunion emboîtée des $P([-y_0, y_0])$. La propriété 4.1.iii indique que, pour y_0 limité, l'ensemble satisfait les hypothèses du lemme 6.3. Donc ${}^\circ P([-y_0, y_0])$ est connexe.

Si ${}^\circ\mathcal{F}$ était non connexe, une partition en deux fermés (standard) disjoints non vides donnerait une partition en deux fermés disjoints de ${}^\circ P([-y_0, y_0])$. Pour y_0 limité suffisamment grand, ces fermés seraient non vides.

iv. Pour les éléments standard, c'est une conséquence du lemme 4.1.iii; pour les éléments non standard, on obtient la propriété par transfert.

v. Par transfert, il suffit de prouver la propriété pour des points standard. Soit (x, y) un point standard du plan. Soit n tel que $n\varepsilon \simeq x$. Grâce à la propriété 4.1.vi, il existe y_0 tel que $P(y_0)(n\varepsilon) = y$. L'ombre de $P(y_0)$ passe alors par le point (x, y) . ■

Ces propriétés de ${}^\circ\mathcal{F}$ vont nous permettre de construire un homéomorphisme de ${}^\circ\mathcal{F}$ sur \mathbb{R} qui donnera la paramétrisation attendue.

Soit K une fonction standard, continue, strictement positive, telle que $xK(x)$ soit intégrable sur \mathbb{R} . On peut, par exemple, choisir $K(x) = \exp(-x^2)$. Soit I l'application définie sur \mathcal{L} par

$$I(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)u(x)dx .$$

Cette fonction I est bien définie sur tout \mathcal{L} grâce à la condition d'intégrabilité. Elle est standard, strictement croissante et continue (appliquer le théorème de convergence dominée : si une suite u_n de \mathcal{L} converge uniformément sur tout compact vers u , elle est dominée par $|u(0)| + 1 + M|t|$).

La restriction de I à ${}^\circ\mathcal{F}$ est donc une application strictement croissante, continue. Le lemme 6.8 montre que c'est un homéomorphisme sur son image. De plus, $I({}^\circ\mathcal{F})$ est un ensemble standard connexe contenant des infiniment grands positifs et négatifs. Donc c'est \mathbb{R} tout entier, et l'homéomorphisme réciproque est la famille bien née cherchée.

5 Preuve du théorème 2 : le cas général

L'hypothèse de complétude de l'équation $y' = \psi(x, y)$ sera utilisée pour définir la solution *la plus grande* passant par une condition initiale donnée. Plus précisément : soit \mathcal{S} l'ensemble des solutions de l'équation $y' = \psi(x, y)$, définies sur \mathbb{R} tout entier. Pour x_0, y_0 donnés, définissons la fonction y_{x_0, y_0}^{\max} par

$$y_{x_0, y_0}^{\max}(x) = \sup_{y \in \mathcal{S}, y(x_0) = y_0} y(x) \quad .$$

Il est facile de voir que y_{x_0, y_0}^{\max} est une solution de l'équation différentielle, et donc (hypothèse du théorème) qu'elle est définie sur \mathbb{R} tout entier. On définit de même y_{x_0, y_0}^{\min} en remplaçant le sup par un inf.

Venons-en à l'idée de base de la démonstration : soit ω un infiniment grand positif. Notons ψ_ω la fonction définie par

$$\psi_\omega(x, y) = \begin{cases} \omega & \text{si } \psi(x, y) \geq \omega \\ \psi(x, y) & \text{si } |\psi(x, y)| \leq \omega \\ -\omega & \text{si } \psi(x, y) \leq -\omega \end{cases} \quad .$$

Remarquons qu'en tout point limité du plan, les fonctions ψ_ω et ψ coïncident. Par transfert, le théorème 2 peut s'appliquer à l'équation différentielle non standard ψ_ω car celle-ci est une fonction bornée. On obtient donc une famille bien née (non standard) φ_ω . Le but de la démonstration qui suit est de fabriquer l'ombre (en un sens à préciser) de cette famille, pour construire une famille bien née standard de l'équation $y' = \psi(x, y)$. Le principe de cette reconstruction est à peu près le même que dans le paragraphe précédent, les fonctions $\varphi_\omega(\lambda)$ jouant ici le rôle des fonctions affines par morceaux.

La famille φ_ω est une fonction définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathcal{C} , continue, strictement croissante, "surjective" au sens suivant : tout point du plan appartient au graphe d'au moins un $\varphi_\omega(\lambda)$.

Lemme 5.1 *Le sous-ensemble de \mathcal{C} défini par $\mathcal{F} = \varphi_\omega(\mathbb{R})$ a les propriétés suivantes :*

- i. *L'ordre sur \mathcal{F} est total.*
- ii. *\mathcal{F} est connexe.*
- iii. *$\varphi_\omega(\lambda)$ est presque standard et de classe S^1 si et seulement si il existe x_0 limité avec $\varphi_\omega(\lambda, x_0)$ limité.*

Preuve *i.* L'ordre sur \mathcal{F} est induit par l'ordre de \mathbb{R} .

ii. \mathcal{F} est l'image d'un connexe par une application continue.

iii. L'implication directe est triviale. Inversement, si $y_0 = \varphi_\omega(\lambda, x_0)$ est limité, la fonction $\varphi_\omega(\lambda)$ est une solution de $y' = \psi_\omega(x, y)$, passant par le point (x_0, y_0) . Tant qu'elle est limitée, c'est une solution de $y' = \psi(x, y)$. Elle reste piégée entre les fonctions y_{x_0, y_0}^{\min} et y_{x_0, y_0}^{\max} , au moins pour les valeurs limitées de la variable. Elle est donc limitée sur les limités. Comme $\psi_\omega(x, y)$ est limitée pour tout (x, y) limité, la fonction $\varphi_\omega(\lambda)$ est de classe S^1 , elle est presque standard dans \mathcal{C} . ■

Pour remplacer l'espace \mathcal{L} des fonctions globalement lipschitziennes du paragraphe précédent, on va construire un nouveau sous-ensemble standard de \mathcal{C} , noté \mathcal{L}_K . Dans ce but, on va définir une fonction K , et \mathcal{L}_K sera l'espace des fonctions réelles continues u telles que Ku soit intégrable. La fonction K va être choisie par un procédé diagonal afin que toutes les fonctions qui nous intéressent appartiennent à \mathcal{L}_K .

Posons maintenant

$$k(x) = \max\left\{ \sup_{|\xi| \leq |x|} |y_{0, |x|}^{\max}(\xi)|, \sup_{|\xi| \leq |x|} |y_{0, -|x|}^{\min}(\xi)| \right\} .$$

Les sup de cette formule sont bien définis car pour chacun d'eux, il s'agit du sup d'une fonction continue sur un compact. La fonction k est standard, paire, croissante sur \mathbb{R}^+ . L'intérêt de cette définition est :

$$\forall y \in \mathcal{S} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| > |y(0)| \implies |y(x)| \leq k(x) .$$

On définit maintenant le noyau K à utiliser par :

$$K(x) = \frac{1}{k(x) + 1} e^{-x^2} .$$

C'est une fonction standard, strictement positive, paire, décroissante pour $x > 0$. Grâce au mode de construction de K , l'espace \mathcal{L}_K contient toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = \psi(x, y)$; il contient aussi toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = \psi_\omega(x, y)$, car ces dernières sont ω -lipschitziennes et $|K(x)| < e^{-x^2}$.

Lemme 5.2 *Propriétés de \mathcal{F} :*

i. \mathcal{F} est totalement ordonné, non vide, connexe.

ii. Les éléments de \mathcal{F} sont des solutions de l'équation $y' = \psi(x, y)$.

iii. \mathcal{F} est inclus dans \mathcal{L}_K .

iv. Tout point du plan appartient au graphe d'au moins un élément de \mathcal{F} .

Preuve *i.* La preuve est identique à celle de 4.2.ii et 4.2.iii.

ii. Pour les éléments standard, c'est une conséquence de la construction, et pour les éléments non standard, on obtient la propriété par transfert.

- iii. Les éléments de ${}^{\circ}\mathcal{F}$ sont des solutions de l'équation différentielle, donc des éléments de \mathcal{L}_K .
- iv. Par transfert, il suffit de prouver la propriété pour des points standard. Soit (x, y) un point standard de \mathbb{R}^2 . Il existe λ tel que (x, y) appartienne au graphe de $\varphi_{\omega}(\lambda)$ (car φ_{ω} est une famille bien née). La fonction $\varphi_{\omega}(\lambda)$ est de classe S^1 (lemme 5.1.iii). Son ombre appartient à ${}^{\circ}\mathcal{F}$ et a un graphe contenant le point (x, y) . ■

Soit I l'application définie sur \mathcal{L}_K par

$$I(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)u(x)dx .$$

Cette fonction I est bien définie sur tout \mathcal{L}_K grâce à la condition d'intégrabilité. Elle est standard, strictement croissante.

La restriction de I à ${}^{\circ}\mathcal{F}$ est donc une application strictement croissante. Elle est aussi continue (il suffit de vérifier que $\lim I(u_n) = I(\lim(u_n))$ pour les suites standard croissantes, et ceci est vrai avec le théorème de convergence monotone). Le lemme 6.8 montre que c'est un homéomorphisme sur son image. De plus, $I({}^{\circ}\mathcal{F})$ est un ensemble standard connexe contenant des infiniment grands positifs et négatifs. Donc c'est \mathbb{R} tout entier, et l'homéomorphisme réciproque est la famille bien née cherchée.

6 Annexe : topologie non standard

Le but de ce paragraphe est l'étude de l'espace topologique \mathcal{C} des fonctions continues sur \mathbb{R} , muni de sa relation d'ordre et de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Sa topologie est définie par une famille naturelle de semi-normes,

$$\|x\|_k = \sup_{|t| \leq k} |x(t)| .$$

Cette topologie est métrisable (voir [Cho92]) : elle est donnée par exemple par la distance

$$d(x, y) = \sum_{n \leq 1} 2^{-n} \min\{1, \sup_{t \in [-n, n]} |x(t) - y(t)|\}$$

On s'intéressera surtout aux parties totalement ordonnées de \mathcal{C} . L'étude sera faite par des méthodes non standard, le premier paragraphe étant directement inspiré de [DR89]. Les lemmes ci-dessous sont très généraux.

6.1 Lemmes de topologie

Pour une étude plus détaillée, voir [Sar95].

Notation *L'ensemble des voisinages ouverts de x dans un espace topologique E sera noté $\mathcal{V}(x)$.*

Définition 3 Dans un espace topologique (standard), pour tout x standard, le halo de x , noté $\text{hal}(x)$ désigne l'intersection de tous les voisinages ouverts standard de x . C'est un ensemble externe.

Quand l'espace est métrique, c'est aussi l'ensemble externe des y tels que $d(x, y) \simeq 0$. Il ne contient qu'un seul point standard, le point x lui-même.

Dans l'espace \mathcal{C} , le halo de x est l'ensemble des fonctions réelles continues y telles que pour tout t limité, $y(t) - x(t)$ est infinitésimal. C'est aussi l'ensemble des fonctions y ayant x pour ombre.

Lemme 6.1 Un espace topologique est séparé si et seulement si les halos de deux points standard distincts quelconques ont une intersection vide.

Preuve Soient x et y standard tels que $\text{hal}(x) \cap \text{hal}(y)$ contienne un point z . Alors, pour tout voisinage standard U de x et tout voisinage standard V de y , le point z appartient à $U \cap V$, d'où $U \cap V \neq \emptyset$ et E est non séparé.

Réciproquement, si E est non séparé,

$$\exists x \in E \quad \exists y \in E \quad \forall U \in \mathcal{V}(x) \quad \forall V \in \mathcal{V}(y) \quad \exists z \in U \cap V$$

Par transfert, ceci implique

$$\exists^{\text{st}} x \in E \quad \exists^{\text{st}} y \in E \quad \forall^{\text{st}} U \in \mathcal{V}(x) \quad \forall^{\text{st}} V \in \mathcal{V}(y) \quad \exists^{\text{st}} z \in U \cap V$$

L'axiome d'idéalisation produit alors un z (non standard) appartenant à $U \cap V$ pour tous U et V standard, donc appartenant aux deux halos. ■

Définition 4 Dans un espace topologique séparé, la partie standard d'un élément x , notée ${}^{\circ}x$ est (quand il existe) l'unique élément standard tel que $x \in \text{hal}({}^{\circ}x)$.

Dans l'espace \mathcal{C} , la partie standard d'une fonction est, quand elle existe, son ombre (voir [DR89]).

Définition 5 Un élément x d'un espace topologique est dit presque standard s'il existe un élément standard y tel que $x \in \text{hal}(y)$.

Définition 6 Si A est un sous-ensemble d'un espace topologique E , l'ombre de A , notée ${}^{\circ}A$ est l'unique sous-ensemble standard de E caractérisé par

$$\forall^{\text{st}} x \in E \quad x \in {}^{\circ}A \iff A \cap \text{hal}(x) \neq \emptyset .$$

Les deux lemmes qui suivent sont très classiques en topologie métrique et analyse non standard.

Lemme 6.2 Dans un espace topologique, l'ombre de toute partie interne A est fermée.

Preuve On trouvera dans [DR89] une preuve dans le cas métrique. Voici une preuve "topologique" :

Soit y un point (non standard) de ${}^\circ A$. On suppose que x est un point standard tel que $y \in \text{hal}(x)$ et on veut montrer que $x \in {}^\circ A$. Les données s'écrivent

$$\forall^{\text{st}} V \in \mathcal{V}(x) \quad \exists y \in V \cap {}^\circ A \quad .$$

Par transfert, cela donne

$$\forall^{\text{st}} V \in \mathcal{V}(x) \quad \exists^{\text{st}} z \in V \cap {}^\circ A \quad .$$

Pour un tel z , standard de ${}^\circ A$, il existe un u dans $A \cap \text{hal}(z)$. De plus, comme V est un ouvert standard, on a $\text{hal}(z) \subset V$, et on en déduit

$$\forall^{\text{st}} V \in \mathcal{V}(x) \quad \exists u \in V \cap A \quad .$$

Utilisant la structure de $\mathcal{V}(x)$, on a

$$\forall^{\text{st}} \text{fini} \mathbb{V} \subset \mathcal{V}(x) \quad \exists u \quad \forall V \in \mathbb{V} \quad u \in V \cap A \quad .$$

On en déduit, par l'axiome d'idéalisation que

$$\exists u \quad \forall^{\text{st}} V \in \mathcal{V}(x) \quad u \in V \cap A \quad ,$$

c'est-à-dire $u \in \text{hal}(x) \cap A$ donc $x \in {}^\circ A$. ■

Lemme 6.3 *Si A est une partie connexe d'un espace topologique normal E (voir [Bou71]), et si tout point de A est presque standard, alors ${}^\circ A$ est connexe.*

Dans un espace non normal (même séparé), ce théorème est faux. En voici un contre-exemple dont les preuves sont laissées en exercice : soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la topologie définie par les halos suivants :

$$\text{hal}(x, y) = \begin{cases} \{(u, v) \mid u \simeq x, v \simeq y\} & \text{si } (x, y) \not\simeq (0, 0) \\ \{(u, v) \mid u \simeq 0, v \simeq 0, v \neq 0\} \cup \{(0, 0)\} & \text{si } (x, y) \simeq (0, 0) \end{cases}$$

Cet espace topologique séparé non normal est donné dans [Bre93]. Soit ε un réel infinitésimal non nul. Soit $A = [-1, 1] \times \{\varepsilon\}$. C'est un ensemble fermé connexe, tout élément est presque standard. Cependant ${}^\circ A = [-1, 1] \times \{0\}$ possède des points non presque standard (par exemple $(\varepsilon, 0)$), et il n'est pas connexe : le singleton $\{(0, 0)\}$ est un ouvert fermé de ${}^\circ A$.

Preuve Soit (U, V) une partition de ${}^\circ A$ en deux fermés standard. Comme ${}^\circ A$ est fermé (lemme 6.2), U et V sont des fermés disjoints de E . Comme nous sommes dans un espace normal, il existe deux ouverts (standard) \mathcal{U} et \mathcal{V} de E disjoints, tels que $\bar{U} \subset \mathcal{U}$ et $\bar{V} \subset \mathcal{V}$. Les ensembles $A \cap \mathcal{U}$ et $A \cap \mathcal{V}$ sont deux ouverts disjoints de A . De plus, si x est un élément de A , il a (par hypothèse) une partie standard ${}^\circ x$. Celle-ci est dans ${}^\circ A$, donc dans U ou V , donc dans \mathcal{U} ou \mathcal{V} . Comme \mathcal{U} et \mathcal{V} sont des ouverts standard, x appartient à l'un des deux. Donc $A \cap \mathcal{U}$ et $A \cap \mathcal{V}$ forment une partition de A . Comme A est connexe, l'un de ces deux ensembles est vide, par exemple $A \cap \mathcal{U}$.

Supposons, par l'absurde, que U est non vide. Alors, il contiendrait un élément standard x_0 . Le halo de cet x_0 serait inclus dans \mathcal{U} , et contiendrait au moins un point de A . Donc $A \cap \mathcal{U}$ serait non vide, ce qui est absurde.

Ainsi, il n'existe pas de partition de ${}^\circ A$ en deux fermés standard non vides. Par transfert, il n'existe pas non plus de partition de ${}^\circ A$ en deux fermés non vides. ■

Remarquons que l'espace \mathcal{C} est normal car métrisable.

6.2 Topologie et ordre

Dans tout ce paragraphe, on veut étudier les espaces topologiques munis d'une relation d'ordre partiel, et surtout les parties totalement ordonnées de cet espace.

Définition 7 Une topologie sur un ensemble (partiellement) ordonné E est dite compatible avec la relation d'ordre \leq , si et seulement si pour tous x, y, x_0, y_0 dans E , si x_0 et y_0 sont standard, si $x \in \text{hal}(x_0)$, si $y \in \text{hal}(y_0)$ et si $x \leq y$, alors $x_0 \leq y_0$.

En termes classiques, dans le cas des espaces séparables, cela se traduit par le fait que si deux suites convergentes (x_n) et (y_n) vérifient $x_n \leq y_n$ pour tout n , alors $\lim(x_n) \leq \lim(y_n)$. Les topologies classiques sur les espaces de fonctions à valeurs réelles sont compatibles avec la relation d'ordre usuelle, mais la topologie usuelle de \mathbb{R}^2 n'est pas compatible avec l'ordre lexicographique.

Attention cependant : si x_0 et y_0 sont deux éléments standard de \mathcal{C} , il existe toujours des éléments x et y tels que $x \in \text{hal}(x_0)$, $y \in \text{hal}(y_0)$, et x et y non comparables. On peut en effet choisir x et y tels que pour un ω infiniment grand $x(\omega) < y(\omega)$ et $x(-\omega) > y(-\omega)$.

Si une topologie est compatible avec une relation d'ordre partiel, alors elle est séparée. En effet, si x_0 et y_0 sont deux points standard tels que les halos de x_0 et y_0 ont une intersection non vide, en choisissant $x = y$ dans l'intersection des halos et en appliquant la définition 7, on obtient $x_0 \leq y_0$ et $y_0 \leq x_0$, d'où $x_0 = y_0$. On applique alors le lemme 6.1.

Si une topologie est compatible avec une relation d'ordre, toute topologie plus fine est encore compatible (les halos de la topologie la plus fine sont inclus dans les halos de la topologie la moins fine).

Dans toute la suite, on considère que la topologie et l'ordre sur E sont compatibles.

Lemme 6.4 Pour tout a dans E , l'ensemble

$$]-\infty, a] := \{x \in E \mid x \leq a\}$$

est un fermé de E .

Preuve On suppose grâce au transfert que a est standard. Soit y un élément standard du complémentaire de $]-\infty, a]$. Soit z un élément du halo de y . Si on avait $z \leq a$, on aurait aussi, par compatibilité, $y \leq a$, ce qui est absurde. Donc le complémentaire de $]-\infty, a]$ est ouvert. ■

De même, $]a, +\infty[:= \{x \in E \mid a < x\}$ est fermé. Attention cependant : l'ensemble $] -\infty, a[:=] -\infty, a[\setminus \{a\}$ n'est en général pas ouvert : par exemple, dans l'espace \mathcal{C} , la suite (x_n) définie par $x_n(t) = a - 1 + t^2/n^2$ converge vers $a - 1 < a$, bien qu'aucun des termes de la suite ne soit inférieur à a .

Dans le cas des espaces totalement ordonnés, la situation est plus simple ; c'est ce que nous allons voir avec les lemmes qui suivent.

Notation Si A est une partie totalement ordonnée de E , on notera $]a, b[_A$ l'ensemble

$$]a, b[_A = \{x \in A \ ; \ a < x < b\}$$

Des notations analogues sont définies pour les "intervalles" fermés, semi-ouverts, non bornés,...

Le lemme qui suit n'a pas un intérêt pour lui-même ; il servira dans la démonstration du lemme 6.6.

Lemme 6.5 Soit A une partie connexe, totalement ordonnée, standard de E . Soit x un point standard de A . Alors

$$\text{hal}(x) \cap] -\infty, x[_A \neq \emptyset \quad \text{ou (exclusif)} \quad A =]x, +\infty[_A$$

Preuve Supposons que $\text{hal}(x) \cap] -\infty, x[_A = \emptyset$ et étudions les ensembles $F =] -\infty, x[_A \cap A$ et $G =]x, +\infty[_A$. Ce sont des fermés de A (pour F , utiliser le lemme 6.2 et pour G le lemme 6.4), standard. La partie F contient $] -\infty, x[_A$ car elle contient tous ses éléments standard. Elle ne contient pas x puisque $\text{hal}(x)$ ne rencontre pas $] -\infty, x[_A$. Elle a une intersection vide avec G car un point standard y de $F \cap G$ serait dans G , et serait la partie standard d'un point de $] -\infty, x[_A$, ce qui est interdit par la relation de compatibilité et par $x \notin F$. Les ensembles F et G forment donc une partition de A . L'un des deux est vide, or $x \in G$, donc $A = G$. ■

Définition 8 La topologie et la relation d'ordre sur E sont dites fortement compatibles si elles sont compatibles et si, de plus, pour tous x, y, z, x_0 dans E , avec x_0 standard, on a :

$$x \in \text{hal}(x_0) \ , \ y \in \text{hal}(x_0) \ , \ x < z < y \implies z \in \text{hal}(x_0).$$

L'espace \mathcal{C} qui nous intéresse vérifie cette condition de forte compatibilité. En revanche, l'espace des fonctions C^1 muni de la norme uniforme C^1 et de la relation d'ordre usuelle ne vérifie pas cette condition : il suffit de prendre $x_0 = 0$, $x = -\varepsilon$, $y = \varepsilon$ et $z = \varepsilon \sin(t/\varepsilon)$, avec ε infinitésimal pour s'en convaincre.

Lemme 6.6 On suppose que la topologie et l'ordre de E sont fortement compatibles. Soit A une partie totalement ordonnée, connexe de E . Une base d'ouverts de la topologie de A est alors donnée par l'ensemble des intervalles $]a, b[_A$, où a et b parcourent $A \cup \{\pm\infty\}$. En d'autres termes, la topologie de A est la topologie associée à l'ordre.

Preuve Par transfert, on peut supposer A standard.

Tout d'abord, tout intervalle $]a, b[_A$ est un ouvert de A car intersection de A avec deux complémentaires de fermés (voir lemme 6.4) :

$$]a, b[_A = A \cap {}^c] -\infty, a] \cap {}^c[b, +\infty[.$$

Soit U un ouvert de A , et x un point de U , il faut montrer qu'il existe a et b dans $A \cup \{\pm\infty\}$ tels que $x \in]a, b[_A \subset U$. Par transfert, on peut supposer U et x standard. Il suffit alors de démontrer qu'il existe a et b tels que $x \in]a, b[_A \subset \text{hal}(x)$. Par symétrie du problème, il suffit de trouver a dans $A \cup \{-\infty\}$ tel que $x \in]a, x]_A \subset \text{hal}(x)$.

Dans le cas où $A =]x, +\infty[_A$, on prend $a = -\infty$. Dans le cas où A possède des éléments inférieurs à x , en appliquant le lemme 6.5, on voit qu'il existe a dans $\text{hal}(x) \cup]-\infty, x[_A$. En utilisant l'hypothèse de forte compatibilité, on en déduit que $]a, x]_A \subset \text{hal}(x)$. ■

Lemme 6.7 *Si l'ordre sur A est total, il en est de même de l'ordre sur ${}^\circ A$.*

Preuve Par transfert, il suffit de démontrer que deux éléments standard quelconques x_0 et y_0 de ${}^\circ A$ sont comparables. Or il existe x et y dans A tels que $x_0 = {}^\circ x$ et $y_0 = {}^\circ y$. Ces deux éléments de A sont comparables, par exemple $x \leq y$, et l'hypothèse de compatibilité (définition 7) donne alors $x_0 \leq y_0$. ■

Pour finir, voici le lemme utile dans le travail sur les familles bien nées.

Lemme 6.8 *On suppose que la topologie et la relation d'ordre sur E sont fortement compatibles. Soit A une partie connexe totalement ordonnée de E . Soit f une fonction continue strictement croissante de A vers \mathbb{R} . Alors f est un homéomorphisme sur son image.*

Preuve La fonction f est clairement bijective sur son image. L'ensemble d'arrivée $f(A)$ est connexe, c'est donc un intervalle de \mathbb{R} . L'image par f d'un intervalle $]a, b[_A$ est $]f(a), f(b)[$, ouvert de \mathbb{R} , donc tout ouvert de la base d'ouverts décrite au lemme 6.6 a pour image un ouvert. L'application f est donc ouverte. ■

Références

- [Beb85] R. Bebbouchi. Equations différentielles ordinaires : existence, unicité et analyse non classique. monographie 1959/10/85, OPU, Alger, 1985.
- [Bou71] N. Bourbaki. *Elements de mathématiques - Topologie générale*. 1971.
- [Bre93] G. Bredon. *Topology and geometry*. 1993.
- [Cau81] A.L. Cauchy. *Equations différentielles ordinaires, cours inédit*. CNRS, Academic Press, 1981.
- [Cho92] G. Choquet. *Cours de topologie*. Masson, 1992.
- [DR89] F. Diener and G. Reeb. *Analyse Non Standard*. Collection Enseignement des Sciences. Hermann, Paris, 1989.
- [Sar95] Tewfik Sari. General topology. In F. Diener and M. Diener, editors, *Nonstandard analysis in practice*, chapter 6, pages 109–134. Springer-Verlag, 1995.

Liste des prépublications

- 99-1 Monique Jeanblanc et Nicolas Privault. A complete market model with Poisson and Brownian components. A paraître dans *Proceedings of the Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications*, Ascona, 1999.
- 99-2 Laurence Cherfils et Alain Miranville. Generalized Cahn-Hilliard equations with a logarithmic free energy. A paraître dans *Revista de la Real Academia de Ciencias*.
- 99-3 Jean-Jacques Prat et Nicolas Privault. Explicit stochastic analysis of Brownian motion and point measures on Riemannian manifolds. *Journal of Functional Analysis* **167** (1999) 201-242.
- 99-4 Changgui Zhang. Sur la fonction q -Gamma de Jackson. A paraître dans *Aequationes Math.*
- 99-5 Nicolas Privault. A characterization of grand canonical Gibbs measures by duality. A paraître dans *Potential Analysis*.
- 99-6 Guy Wallet. La variété des équations surstables. A paraître dans *Bulletin de la Société Mathématique de France*.
- 99-7 Nicolas Privault et Jiang-Lun Wu. Poisson stochastic integration in Hilbert spaces. *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, **6** (1999) 41-61.
- 99-8 Augustin Fruchard et Reinhard Schäfke. Sursabilité et résonance.
- 99-9 Nicolas Privault. Connections and curvature in the Riemannian geometry of configuration spaces. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **330** (2000) 899-904.
- 99-10 Fabienne Marotte et Changgui Zhang. Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q -différences linéaire analytique. A paraître dans *Annales de l'Institut Fourier*, 2000.
- 99-11 Knut Aase, Bernt Øksendal, Nicolas Privault et Jan Ubøe. White noise generalizations of the Clark-Haussmann-Ocone theorem with application to mathematical finance. *Finance and Stochastics*, **4** (2000) 465-496.
- 00-01 Eric Benoît. Canards en un point pseudo-singulier nœud. A paraître dans *Bulletin de la Société Mathématique de France*.
- 00-02 Nicolas Privault. Hypothesis testing and Skorokhod stochastic integration. *Journal of Applied Probability*, **37** (2000) 560-574.
- 00-03 Changgui Zhang. La fonction théta de Jacobi et la sommabilité des séries entières q -Gevrey, I. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **331** (2000) 31-34.
- 00-04 Guy Wallet. Déformation topologique par changement d'échelle.
- 00-05 Nicolas Privault. Quantum stochastic calculus for the uniform measure and Boolean convolution. A paraître dans *Séminaire de Probabilités XXXV*.
- 00-06 Changgui Zhang. Sur les fonctions q -Bessel de Jackson.
- 00-07 Laure Coutin, David Nualart et Ciprian A. Tudor. Tanaka formula for the fractional Brownian motion. A paraître dans *Stochastic Processes and their Applications*.

- 00-08 Nicolas Privault. On logarithmic Sobolev inequalities for normal martingales. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* **9** (2000) 509-518.
- 01-01 Emanuelle Augeraud-Veron et Laurent Augier. Stabilizing endogenous fluctuations by fiscal policies ; Global analysis on piecewise continuous dynamical systems. A paraître dans *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*
- 01-02 Delphine Boucher. About the polynomial solutions of homogeneous linear differential equations depending on parameters. A paraître dans *Proceedings of the 1999 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation : ISSAC 99, Sam Dooley Ed., ACM, New York 1999.*
- 01-03 Nicolas Privault. Quasi-invariance for Lévy processes under anticipating shifts.
- 01-04 Nicolas Privault. Distribution-valued iterated gradient and chaotic decompositions of Poisson jump times functionals.
- 01-05 Christian Houdré et Nicolas Privault. Deviation inequalities : an approach via covariance representations.
- 01-06 Abdallah El Hamidi. Remarques sur les sentinelles pour les systèmes distribués
- 02-01 E. Benoît, A. El Hamidi et A. Fruchard. On combined asymptotic expansions in singular perturbation.
- 02-02 R. Bebbouchi et E. Benoît. Equations différentielles et familles bien nées de courbes planes.