Prépublications du Département de Mathématiques

Université de La Rochelle
Avenue Marillac
17042 La Rochelle Cedex 1
http ://www.univ-lr.fr/labo/lmca

Equation fonctionnelle :
Transport et convolution

Eric Benoît

Juin 2005

Classification :
Mots clés :

2005/07

Equation fonctionnelle : Transport et convolution

Eric Benoît*

12 octobre 2005

1 Introduction

Dans l'article [BR04], un modèle de dynamique de population structurée en poids est établi. Il s'agit de l'équation

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[K_{eff}Ae^{\alpha x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-q}\varphi(q)\,u(t,x-q)\,u(t,x)\,dq\right] \\ &\quad -Ae^{\alpha x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha q}\varphi(q)\,u(t,x+q)\,u(t,x)\,dq\ .\end{aligned} \tag{1}$$

La variable x désigne le logarithme du poids, u est la distribution à l'instant t de la population suivant la variable x. Le terme dérivé par rapport à x modélise la croissance, l'autre terme la mortalité. Les nombres K_{eff}, A, et α sont des paramètres, et la fonction φ est une fonction en cloche, définie sur $\mathbb{R}$, et qu'on peut éventuellement supposer nulle sur les réels négatifs. Elle modélise la préférence pour une prédation d'un poisson par un autre dont le rapport des poids est e^q.

Dans ce même article, une première étude de l'équation est menée : on y détermine une solution stationnaire de la forme $u(t,x) = \exp(\lambda x)$ (avec λ négatif). Par contre, aucune preuve d'existence ou d'unicité n'est donnée, et les conditions au bord posent un problème délicat, mal élucidé, que ce soit du point de vue biologique ou du point de vue mathématique.

Je me propose ici d'étudier l'existence et l'unicité des solutions pour cette équation. En fait, je vais généraliser le problème pour le rendre plus conceptuel, et on va regarder les équations du type

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\,\mathcal{G}(u)\,\frac{\partial u}{\partial x}\; - \;\mathcal{M}(u)\,u\quad , \tag{2}$$

*Laboratoire de Mathématiques et Applications, Université de la Rochelle, avenue Michel Crépeau, 17042 LA ROCHELLE, courriel : ebenoit@univ-lr.fr

où $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$ sont des fonctionnelles avec de bonnes propriétés du type de la convolution.

Cette équation peut d'un certain point de vue être considérée comme un problème de transport. Cependant, le fait que les opérateurs $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$ soient de type convolutif amène peut-être des propriétés ressemblant à de la diffusion. L'équation de Burgers (avec diffusion ?) est assez semblable à notre problème.

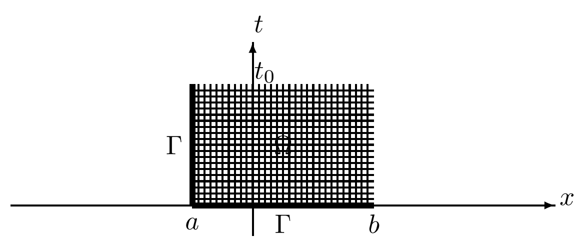
L'une des difficultés est d'adapter des conditions au bord raisonnables pour qu'il y ait existence et unicité. C'est ce problème de condition au bord qui a en grande partie motivé cette étude.

Le théorème principal est énoncé dans le paragraphe 2. La démonstration, utilisant une méthode de point fixe est faite dans le paragraphe 4. L'opérateur sera donné par l'équation de transport ; il sera contractant grâce à la régularité de la convolution. Son étude sera faite dans le paragraphe 3.

2 Notations - Théorème principal

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit t_0 un réel positif, instant au delà duquel nous ne ferons aucune étude. On note Ω le domaine $]0, t_0[\times]a, b[$. Les points a et b ne joueront pas du tout le même rôle car le transport s'effectue dans le sens des x croissants. On appelera *bord initial* du domaine Ω l'ensemble

$$\Gamma \;=\; \{0\} \times [a, b] \;\cup\; [0, t_0] \times \{a\} \;.$$



Le domaine Ω (hachuré) et son bord initial Γ (en gras).

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$. On introduit la famille de semi-normes

$$\|u\|_t \;=\; \sup_{\tau\in[0,t]} \; \sup_{x\in[a,b]} \; |u(t, x)| \;,$$

bien adaptée à notre problème que nous voulons non anticipatif. On notera $\|u\|$ sans indice, la norme $\|u\|_{t_0}$.

Pour des raisons de simplicité, il est commode de donner la condition initiale et la condition au bord par une unique fonction β définie sur Γ, de classe C^1.

Soit $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$ deux opérateurs de $\mathcal{E}$ dans lui-même.

Hypothèse $\boxed{\textbf{H1}}$: *Les opérateurs $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$ vérifient les propriétés de régularité très fortes suivantes : il existe un réel positif K et une fonction continue croissante χ tels que*

$$\forall t \in [0, t_0] \quad , \quad \forall u, v \in \mathcal{E} \ , \qquad \begin{array}{l} \|\mathcal{G}(v) - \mathcal{G}(u)\|_t \leq K\|v - u\|_t \\ \|\mathcal{M}(v) - \mathcal{M}(u)\|_t \leq K\|v - u\|_t \\ \left\|\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{G}(u)\right\|_t \leq \chi(\|u\|_t) \\ \left\|\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{M}(u)\right\|_t \leq \chi(\|u\|_t) \end{array}$$

Remarquons que cette propriété est vérifiée par les opérateurs de convolution, à condition de prendre quelques précautions dans la définition : soit φ une fonction C^1, définie sur $[0, t_0] \times \mathbb{R}$, avec φ et $\partial\varphi/\partial x$ intégrables. Soit γ une fonction continue bornée sur $[0, t_0] \times \mathbb{R}$. Si u est un élément de $\mathcal{E}$ on lui associe une fonction $\tilde{u}$ définie sur $[0, t_0] \times \mathbb{R}$ en posant $\tilde{u} = \gamma$ sur le complémentaire de $\overline{\Omega}$ (cette fonction $\tilde{u}$ est discontinue en $x = a$ et en $x = b$). On pose ensuite $\mathcal{G}(u) = \varphi * \tilde{u}$, ou plutôt sa restriction à $\overline{\Omega}$:

$$\forall (t, x) \in \overline{\Omega} \qquad \mathcal{G}(u)(t, x) \ = \ (\varphi * \tilde{u})(t, x) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, x - \xi)\tilde{u}(t, \xi) d\xi$$

En notant $\|\varphi\|_1$ la norme $\sup_t \int |\varphi(t, x)| dx$, on a alors

$$\|\mathcal{G}(v) - \mathcal{G}(u)\|_t = \|\varphi * \tilde{v} - \varphi * \tilde{u}\|_t \leq \|\varphi\|_1 \|\tilde{v} - \tilde{u}\|_t \leq \|\varphi\|_1 \|v - u\|_t \ \text{ et}$$

$$\|\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{G}(u)\|_t = \|(\frac{\partial}{\partial x}\varphi) * \tilde{u}\|_t \leq \|\frac{\partial}{\partial x}\varphi\|_1 \|u\|_t \ .$$

Hypothèse $\boxed{\textbf{H2}}$: *Il existe un réel strictement positif $\underline{g}$ tel que*

$$\forall u \in \mathcal{E}, \quad u \geq 0 \implies \big(\ \forall (t, x) \in \Omega \ \ \mathcal{G}(u)(t, x) \geq \underline{g} \ \big)$$

On remarque que si φ et γ sont des fonctions positives, l'opérateur de convolution défini quelques lignes plus haut vérifie l'hypothèse H2. Dans le modèle de dynamique de population de poissons, la fonction φ modélise le choix que fait un prédateur pour le poids de ses proies. Elle est par nature positive ou nulle. La fonction γ modélise la disponibilité en proies ayant une masse inférieure à a. Elle doit être positive pour assurer une entrée de nourriture dans le système. On pose $\underline{g} = \min_{(t,x)} \mathcal{G}(0)(t, x)$ et l'hypothèse H2 est naturellement vérifiée.

Théorème 1 *Si les opérateurs $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$ vérifient les hypothèses* **H1** *et* **H2**, *si la condition initiale β de classe C^1 sur le bord initial Γ de Ω est positive ou nulle, alors le problème*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} \ = \ - \ \mathcal{G}(u) \ \frac{\partial u}{\partial x} \ - \ \mathcal{M}(u) \ u & \textit{pour } (t,x) \in \Omega \\ u(t,x) = \beta(t,x) & \textit{pour } (t,x) \in \Gamma \end{cases} \tag{3}$$

admet une unique solution locale, c'est-à-dire définie sur $[0, t_{max}[\times[a,b]$.

3 Etude de l'opérateur

Le processus itératif qu'on mettra en place dans le paragraphe suivant exige l'étude d'un opérateur qui, essentiellement, consiste à résoudre une équation de transport. C'est ce que nous allons faire maintenant, en démontrant des majorations de Lipschitz qui seront indispensables plus loin.

Soit g et m deux éléments de $\mathcal{E}$, tel que $\partial g/\partial x$ soit aussi dans $\mathcal{E}$. La fonction β est celle donnée dans l'introduction. On suppose $g \geq \underline{g}$.

Proposition 2 *Si g, $\partial g/\partial x$ et m sont des éléments de $\mathcal{E}$, avec $g \geq \underline{g}$, alors le problème*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} \ = \ - \ g(t,x) \ \frac{\partial u}{\partial x} \ - \ m(t,x) \ u & \textit{pour } (t,x) \in \Omega \\ u(t,x) = \beta(t,x) & \textit{pour } (t,x) \in \Gamma \end{cases} \tag{4}$$

admet une unique solution dans $\mathcal{E}$.

Le problème (4) est une équation linéaire de transport. Sa résolution, par la méthode des caractéristiques, est élémentaire. Nous allons revenir sur cette construction dans la démonstration de la proposition qui suit.

Théorème 3 *Soit g_1, g_2, m_1, m_2, $\frac{\partial g_1}{\partial x}$, $\frac{\partial g_2}{\partial x}$, $\frac{\partial m_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial m_2}{\partial x}$ des éléments de $\mathcal{E}$ tels que $g_1 \geq \underline{g}$ et $g_2 \geq \underline{g}$. Notons u_1 et u_2 les solutions du problème (4) correspondant, alors*

$$\forall t \in [0, t_0] \quad , \quad \|u_2 - u_1\|_t \ \leq \ t\,(c_1\|g_2 - g_1\|_t + c_2\|m_2 - m_1\|_t)$$

Les formules définissant les réels c_1 et c_2 sont données plus loin.

Tout le reste de ce paragraphe est dévolu à la preuve de ce théorème.

Rappelons tout d'abord le classique lemme de Gronwall sous la forme que nous utiliserons :

Lemme de Gronwall : *Soit f_1 et f_2 deux fonctions de classe C^1 sur un domaine convexe $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit u_1 et u_2 deux fonctions définies sur $[0, t_0]$. On suppose que pour tout t, les points $(t, u_1(t))$ et $(t, u_2(t))$ appartiennent à $\mathcal{D}$.*

Si, pour tout t, on a $\dot{u}_1 = f_1(t, u_1)$ et $\dot{u}_2 = f_2(t, u_2)$, alors

$$\|u_2 - u_1\| \;\le\; (|u_2(0) - u_1(0)| + t\,\|f_2 - f_1\|\,)\,e^{Kt} \quad \textit{avec} \quad K = \|\partial f_1/\partial u\|$$

où la norme considérée est la norme uniforme.

Pour résoudre le problème (4), on étudie le flot des caractéristiques. Celui-ci est donné par le champ de vecteurs

$$\begin{cases} dt/d\tau &= 1 \\ dx/d\tau &= g(t(\tau), x(\tau)) \end{cases}$$

Soit (t, x) un point donné dans Ω. Notons $(\tau, X(\tau))$ la caractéristique passant par ce point, c'est-à-dire vérifiant $X(t) = x$. Comme $g \ge \underline{g} > 0$, la fonction X est croissante et la caractéristique coupe Γ transversalement en un unique point qu'on notera B (voir figure). On notera t_B et x_B les coordonnées de ce point. On a donc $t_B = 0$ ou $x_B = a$.

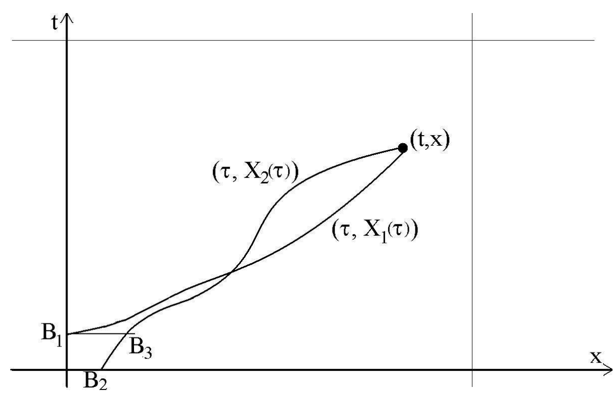


Figure 1 – Les caractéristiques de deux équations de transport voisines

On fait cette construction pour les deux équations $(4)_1$ et $(4)_2$, tous les objets construits étant indicés par 1 ou 2. Quitte à échanger les deux problèmes, on peut supposer que $t_{B_1} \ge t_{B_2}$. (La situation représentée sur la figure est la plus compliquée, avec $x_{B_1} = a$ et $t_{B_1} > t_{B_2} = 0$). On note B_3 le point de coordonnées $t_{B_3} = t_{B_1}$ et $x_{B_3} = X_2(t_{B_1})$ (voir figure).

Lemme 4 *Les caractéristiques des deux équations sont proches au sens suivant :*

$$\forall \tau \in [t_{B_1}, t] \quad , \quad |X_2(\tau) - X_1(\tau)| \;\le\; c_3 t \|g_2 - g_1\|_t \tag{5}$$

avec $c_3 = \exp\left(t \left\| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right\|_t\right)$.

Preuve On applique le lemme de Gronwall aux équations $dx/d\tau = g_1(\tau, x)$ et $dx/d\tau = g_2(\tau, x)$ pour comparer leurs solutions $X_1(\tau)$ et $X_2(\tau)$ définies toutes deux sur l'intervalle $[t_{B_1}, t]$. On obtient la majoration suivante :

$$|X_2(\tau) - X_1(\tau)| \leq (t-\tau)\|g_2 - g_1\|_t e^{\|\partial g_1/\partial x\|_t (t-\tau)}$$

qui donne aisément la majoration (5). ∎

Lemme 5 *Les points B_1 et B_2 sont proches au sens suivant :*

$$0 \ \leq \ x_{B_2} - x_{B_1} \ \leq \ c_3 t \|g_2 - g_1\|_t \tag{6}$$

$$0 \ \leq \ t_{B_1} - t_{B_2} \ \leq \ \frac{c_3}{\underline{g}} t \|g_2 - g_1\|_t \tag{7}$$

Preuve La première chose à faire est d'appliquer la majoration (5) pour $\tau = t_{B_1}$. On obtient

$$|x_{B_3} - x_{B_1}| \ \leq c_3 t \|g_2 - g_1\|_t$$

Comme on a $x_{B_1} \leq x_{B_2} \leq x_{B_3}$ (voir figure), on en déduit la majoration (6).

Pour majorer $t_{B_1} - t_{B_2}$, on procède de la sorte :

$$\underline{g}(t_{B_1} - t_{B_2}) \ \leq \ \int_{t_{B_2}}^{t_{B_1}} g_2(\tau, X_2(\tau)) d\tau \ = \ x_{B_3} - x_{B_2} \ \leq \ x_{B_3} - x_{B_1}$$

Ceci donne immédiatement la majoration (7). ∎

Pour poursuivre l'étude de l'équation de transport (4), on pose

$$\forall \tau \in [t_{B_1}, t] \quad , \quad \varphi_1(\tau) = u_1(\tau, X_1(\tau)) \quad .$$

Cette fonction est la solution de l'équation

$$\frac{d}{d\tau}\varphi_1(\tau) \ = \ -\varphi_1(\tau) \ m_1(\tau, X_1(\tau)) \tag{8}$$

avec la condition initiale $\varphi_1(t_{B_1}) = \beta(B_1)$. On fait la même construction avec les objets d'indice 2. Pour comparer ces deux fonctions φ_1 et φ_2 on va à nouveau utiliser le lemme de Gronwall. Auparavant, il faut estimer la différence des valeurs initiales. C'est le but du prochain lemme.

Lemme 6 *On a les majorations suivantes :*

$$\|\varphi_2\| \ \leq \ c_4 \|\beta\| \tag{9}$$

avec $c_4 = \exp(t\|m_2\|_t)$.

$$|\varphi_2(t_{B_1}) - \varphi_2(t_{B_2})| \ \leq \ \frac{c_3 c_4}{\underline{g}}\|\beta\| \ \|m_2\|_t \ t \ \|g_2 - g_1\|_t \tag{10}$$

$$|\varphi_2(t_{B_1}) - \varphi_1(t_{B_1})| \ \leq \ c_5 \ t \ \|g_2 - g_1\| \tag{11}$$

où c_5 *est défini par*

$$c_5 \ = \ \frac{c_3 c_4}{\underline{g}}\|\beta\| \ \|m_2\|_t \ + \ \frac{1}{\underline{g}}\left\|\frac{\partial \beta}{\partial t}\right\| \ + \ \left\|\frac{\partial \beta}{\partial x}\right\|$$

Preuve L'équation $\frac{d}{d\tau}\varphi_2 = \|m_2\|_t \varphi_2(\tau)$ est une équation majorante de l'équation $(8)_2$. La majoration (9) en découle.

La seconde est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction φ_2, et à l'utilisation des majorations (7) et (9).

Quant à la troisième, elle s'obtient en combinant (10) et une majoration de $|\beta(B_2) - \beta(B_1)|$ issue de l'inégalité des accroissements finis. ∎

Toujours dans le but d'utiliser le lemme de Gronwall, il faut majorer la différence des équations $(8)_1$ et $(8)_2$. C'est le but du lemme suivant

Lemme 7 *On a la majoration suivante :*

$$\forall \tau \in [0,t] \ , \ |m_2(\tau, X_2(\tau)) - m_1(\tau, X_1(\tau))| \ \leq \ c_6\|g_2 - g_1\|_t + \|m_2 - m_1\|_t \tag{12}$$

avec $c_6 = c_3 t \left\|\frac{\partial m_2}{\partial x}\right\|_t$.

Preuve C'est l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction m_2 qui donne ce résultat, grâce aussi à la majoration (5). ∎

Pour démontrer le théorème 3, il ne reste plus qu'à appliquer le lemme de Gronwall aux équations $(8)_1$ et $(8)_2$ sur le segment $[t_{B_1}, t]$. Les formules (9) et (12) donnent la majoration de la différence des fonctions, la formule (11) majore la différence des conditions initiales. Le lemme de Gronwall donne alors

$$|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| \ \leq \ ((c_5 + c_6)t\|g_2 - g_1\|_t + t\|m_2 - m_1\|_t)\, e^{\|m_2\|_t t}$$

Ceci démontre le théorème et donne les formules de c_1 et c_2 : comme, dans la preuve, les indices 1 et 2 ont été arbitrairement déterminés, les formules ci-dessous sont légèrement modifiées afin de leur redonner la symétrie naturelle du problème.

Formules de calcul des c_i :

$$c_3 \ = \ \exp\left(t \max\left\{\left\|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right\|_t \ , \ \left\|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right\|_t\right\}\right)$$

$$\begin{aligned}
c_4 &= \exp(t \max\{\|m_1\|_t, \|m_2\|_t\}) \\
c_5 &= \frac{c_3 c_4}{\underline{g}} \|\beta\| \ \max\{\|m_1\|_t, \|m_2\|_t\} \ + \ \frac{1}{\underline{g}} \left\| \frac{\partial \beta}{\partial t} \right\| \ + \ \left\| \frac{\partial \beta}{\partial x} \right\| \\
c_6 &= c_3 t \max\left\{ \left\| \frac{\partial m_1}{\partial x} \right\|_t \ , \ \left\| \frac{\partial m_2}{\partial x} \right\|_t \right\} \\
c_1 &= (c_5 + c_6) c_4 \\
c_2 &= c_4
\end{aligned}$$

4 Méthode du point fixe

Revenons au théorème principal 1. Notons $\mathcal{E}_t$ l'espace des fonctions continues sur $[0,t] \times [a,b]$., muni de la norme $\|.\|_t$. On définit un opérateur $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}_t$ dans lui-même ainsi : $\mathcal{A}(u)$ est l'unique solution du problème (4) avec $g(t,x) = \mathcal{G}(u)(t,x)$ et $m(t,x) = \mathcal{M}(u)(t,x)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial(\mathcal{A}u)}{\partial t} \ = \ - \ \mathcal{G}(u) \ \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{A}(u)) \ - \ \mathcal{M}(u) \ \mathcal{A}(u) & \text{pour } (t,x) \in [0,t] \times [a,b] \\ \mathcal{A}(u)(t,x) = \beta(t,x) & \text{pour } (t,x) \in \Gamma \end{array} \right. \tag{13}$$

Un point fixe de l'opérateur $\mathcal{A}$ est une solution du problème (3) sur le domaine $[0,t] \times [a,b]$. On va appliquer une méthode du point fixe à cet opérateur.

Lemme 8 *Si t est suffisamment petit, il existe des constantes positives C et M telles que $C < 1$ et*

$$\forall u \in \mathcal{E}_t \quad , \quad \|u\|_t < M \implies \|\mathcal{A}(u)\|_t < M$$

$$\forall u_1, u_2 \in \mathcal{E}_t \quad , \quad \|u_1\|_t < M \ \textit{et} \ \|u_2\|_t < M \implies \|\mathcal{A}(u_2) - \mathcal{A}(u_1)\|_t < C\|u_2 - u_1\|_t \ .$$

Preuve du lemme Contrairement à la façon dont est énoncé le lemme, on va pouvoir choisir M presque de façon quelconque : soit M tel que

$$M \ > \ \sup_{x \in [a,b]} |\beta(0,x)|$$

Si t est un réel quelconque, les opérateurs $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$ sont définis sur $\mathcal{E}_t$. Pour tout couple u_1, u_2 dans $\mathcal{E}_t$, on peut appliquer le théorème 3 avec $g_1 = \mathcal{G}(u_1)$, $g_2 = \mathcal{G}(u_2)$, $m_1 = \mathcal{M}(u_1)$ et $m_2 = \mathcal{M}(u_2)$. L'hypothèse **H1** permet de majorer les nombres c_i uniformément pour tous les u de norme inférieure à M : en effet,

$$c_3 \ \leq \ \tilde{c}_3 \ = \ \exp(t \ \chi(M))$$

$$c_4 \ \leq \ \tilde{c}_4 \ = \ \exp(t(KM + \|\mathcal{M}(0)\|_t))$$

$$c_5 \ \leq \ \tilde{c}_5 \ = \ \frac{\tilde{c}_3\tilde{c}_4}{\underline{g}}\|\beta\| \ (KM + \|\mathcal{M}(0)\|_t) \ + \ \frac{1}{\underline{g}}\left\|\frac{\partial\beta}{\partial t}\right\| \ + \ \left\|\frac{\partial\beta}{\partial x}\right\|$$

$$c_6 \ \leq \ \tilde{c}_6 \ = \ \tilde{c}_3 t \ \chi(M)$$

$$c_1 \ \leq \ \tilde{c}_1 \ = \ (\tilde{c}_5 + \tilde{c}_6)\tilde{c}_4$$

$$c_2 \ \leq \ \tilde{c}_2 \ = \ \tilde{c}_4$$

Il est facile de voir que les $\tilde{c}_i$ sont des fonctions continues croissantes de t et donc que $t(\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2)K + \frac{\|\mathcal{A}(0)\|_t}{M}$ est une fonction croissante continue de t. Sa valeur en zéro est $\frac{\|\mathcal{A}(0)\|_t}{M}$, à savoir $(1/M)\sup_{x\in[a,b]}|\beta(0,x)|$. Elle est donc inférieure strictement à 1.

On choisit maintenant t tel que

$$t(\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2)K + \frac{\|\mathcal{A}(0)\|_t}{M} \ < \ 1$$

et on pose

$$C \ = \ t(\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2)K$$

On a bien sûr $C < 1$.

Par construction, en appliquant le théorème 3 aux couples $(u_1, u_2$ ou $(u, 0)$ de fonctions de $\mathcal{E}_t$, on a les majorations requises. ∎

Preuve du théorème 1

Choisissons t, M et C vérifiant les propriétés du lemme 8. La partie de $\mathcal{E}_t$ constituée des fonctions de norme inférieure ou égale à M est un espace métrique complet. Le lemme 8 assure que $\mathcal{E}_t$ est stable par $\mathcal{A}$, et que $\mathcal{A}$ est contractant. Donc $\mathcal{A}$ admet un unique point fixe. On a donc trouvé une solution locale au problème.

L'unicité découle du même raisonnement. ∎

5 Retour au modèle de dynamique de populations

Pour appliquer la théorie précédente à l'équation (1) qui a motivé cette étude, il nous faut préciser les opérateurs $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$. Ils sont donnés par un calcul utilisant les propriétés classiques du produit de convolution (changement de variable $q \mapsto x - q$, et intégration par parties). Ce calcul est élémentaire bien que les expressions soient un peu longues. Il donne

$$\mathcal{G}(u)(t,x) \ = \ K_{eff} A e^{(\alpha-1)x} \int_{-\infty}^{\infty} e^q \varphi(x-q) u(t,q) dq$$

$$\mathcal{M}(u)(t,x) \;=\; A\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha q}\varphi(q-x)u(t,q)dq \; +$$
$$+\; K_{eff}Ae^{(\alpha-1)x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{q}\left((1-\alpha)\varphi(x-q)-\varphi'(x-q)\right)u(t,q)dq$$

Dans l'article [BR04], on a fixé plus ou moins arbitrairement des tailles minimum et maximum. Ce sont les valeurs a et b de la théorie ci-dessus. On a dû aussi imposer la dynamique de population du plancton (et autres petits organismes) : c'est la fonction β de la théorie-ci-dessus, sur le domaine $x \leq a$.

On peut remarquer que les opérateurs $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$ du modèle sont indépendants du temps. La raison en est que nous avons supposé que les lois d'évolution de la population n'ont pas de mémoire : l'accroissement de population à l'instant t ne dépend que de la population à l'instant t. Peut-être, dans l'avenir, y aura-t-il des modèles de dynamique faisant intervenir un retard. La théorie de cet article pourrait encore d'appliquer. Quoiqu'il en soit, cette propriété permet de ne pas tenir compte de l'indice t dans le calcul des normes.

Montrons que l'hypothèse **H1** est vérifiée. Les opérateurs $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$ sont linéaires. On peut facilement calculer la valeur de la constante K en fonction des paramètres du modèle. Cependant, cette valeur est désastreuse : elle est proportionnelle, entre autres, à $e^{\alpha b}$ qui n'a aucun sens écologique, car dépend du seuil arbitraire b. De plus, sa valeur est très grande, ce qui mènera, après estimation de toutes les constantes c_i à un temps t_{max} très petit.

La majoration des dérivées $\frac{\partial}{\partial x}$ est immédiate avec l'écriture donnée de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$.

L'hypothèse **H2** est moins évidente. Elle est d'ailleurs contradictoire avec l'existence de solutions stationnaires nulles sauf sur certains intervalles qui ont été étudiées dans l'article [BR04]. Cette hypothèse indique, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, que le terme de transport (i.e. la croissance) est uniformément minoré. Dans le modèle, il signifie que les populations de poissons ont toujours de la nourriture. Mathématiquement, cela provient du fait que la fonction

$$K_{eff}Ae^{(\alpha-1)x}\int_{-\infty}^{a} e^{q}\varphi(x-q)\beta(t,q)dq$$

est minorée par une constante non nulle. Cela correspond à un phénomène pourtant improbable dans la nature : la croissance de gros poissons nourris uniquement avec du plancton...

Pour conclure, il faut avouer que le résultat mathématique démontré dans cet article n'intéressera sans doute pas beaucoup les écologistes. En effet, ces derniers acceptent sans hésiter l'existence d'une solution locale (c'est-à-dire définie sur un certain intervalle de temps, malheureusement très mal précisé). La question naturelle qui se pose est : cette solution est-elle défionie jusqu'à $t = +\infty$? Dans le cas contraire, quel phénomène apparaît à l'extrémité du domaine de définition ? La fonction u prend-elle des valeurs infinies ? ou (plus vraisemblable) la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ devient-elle infinie ?

Références

[BR04] E. Benoît and M.J. Rochet. A continuous model of biomass size spectra governed by predation and the effects of fishing on them. *Journal of Theoretical Biology*, 2004.

Liste des prépublications

99-1 Monique Jeanblanc et Nicolas Privault. A complete market model with Poisson and Brownian components. A paraître dans *Proceedings of the Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications*, Ascona, 1999.

99-2 Laurence Cherfils et Alain Miranville. Generalized Cahn-Hilliard equations with a logarithmic free energy. A paraître dans *Revista de la Real Academia de Ciencias.*

99-3 Jean-Jacques Prat et Nicolas Privault. Explicit stochastic analysis of Brownian motion and point measures on Riemannian manifolds. *Journal of Functional Analysis* **167** (1999) 201-242.

99-4 Changgui Zhang. Sur la fonction q-Gamma de Jackson. A paraître dans *Aequationes Math.*

99-5 Nicolas Privault. A characterization of grand canonical Gibbs measures by duality. A paraître dans *Potential Analysis.*

99-6 Guy Wallet. La variété des équations surstables. A paraître dans *Bulletin de la Société Mathématique de France.*

99-7 Nicolas Privault et Jiang-Lun Wu. Poisson stochastic integration in Hilbert spaces. *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, **6** (1999) 41-61.

99-8 Augustin Fruchard et Reinhard Schäfke. Sursabilité et résonance.

99-9 Nicolas Privault. Connections and curvature in the Riemannian geometry of configuration spaces. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **330** (2000) 899-904.

99-10 Fabienne Marotte et Changgui Zhang. Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique. A paraître dans *Annales de l'Institut Fourier*, 2000.

99-11 Knut Aase, Bernt Øksendal, Nicolas Privault et Jan Ubøe. White noise generalizations of the Clark-Haussmann-Ocone theorem with application to mathematical finance. *Finance and Stochastics*, **4** (2000) 465-496.

00-01 Eric Benoît. Canards en un point pseudo-singulier nœud. A paraître dans *Bulletin de la Société Mathématique de France.*

00-02 Nicolas Privault. Hypothesis testing and Skorokhod stochastic integration. *Journal of Applied Probability*, **37** (2000) 560-574.

00-03 Changgui Zhang. La fonction théta de Jacobi et la sommabilité des séries entières q-Gevrey, I. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **331** (2000) 31-34.

00-04 Guy Wallet. Déformation topologique par changement d'échelle.

00-05 Nicolas Privault. Quantum stochastic calculus for the uniform measure and Boolean convolution. A paraître dans *Séminaire de Probabilités* **XXXV**.

00-06 Changgui Zhang. Sur les fonctions q-Bessel de Jackson.

00-07 Laure Coutin, David Nualart et Ciprian A. Tudor. Tanaka formula for the fractional Brownian motion. A paraître dans *Stochastic Processes and their Applications.*

00-08 Nicolas Privault. On logarithmic Sobolev inequalities for normal martingales. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* **9** (2000) 509-518.

01-01 Emanuelle Augeraud-Veron et Laurent Augier. Stabilizing endogenous fluctuations by fiscal policies; Global analysis on piecewise continuous dynamical systems. A paraître dans *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*

01-02 Delphine Boucher. About the polynomial solutions of homogeneous linear differential equations depending on parameters. A paraître dans *Proceedings of the 1999 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation : ISSAC 99, Sam Dooley Ed., ACM, New York 1999.*

01-03 Nicolas Privault. Quasi-invariance for Lévy processes under anticipating shifts.

01-04 Nicolas Privault. Distribution-valued iterated gradient and chaotic decompositions of Poisson jump times functionals.

01-05 Christian Houdré et Nicolas Privault. Deviation inequalities : an approach via covariance representations.

01-06 Abdallah El Hamidi. Remarques sur les sentinelles pour les systèmes distribués

02-01 Eric Benoît, Abdallah El Hamidi et Augustin Fruchard. On combined asymptotic expansions in singular perturbation.

02-02 Rachid Bebbouchi et Eric Benoît. Equations différentielles et familles bien nées de courbes planes.

02-03 Abdallah El Hamidi et Gennady G. Laptev. Nonexistence of solutions to systems of higher-order semilinear inequalities in cone-like domains.

02-04 Hassan Lakhel, Youssef Ouknine, et Ciprian A. Tudor. Besov regularity for the indefinite Skorohod integral with respect to the fractional Brownian motion : the singular case.

02-05 Nicolas Privault et Jean-Claude Zambrini. Markovian bridges and reversible diffusions with jumps.

02-06 Abdallah El Hamidi et Gennady G. Laptev. Existence and Nonexistence Results for Reaction-Diffusion Equations in Product of Cones.

02-07 Guy Wallet. Nonstandard generic points.

02-08 Gilles Bailly-Maitre. On the monodromy representation of polynomials.

02-09 Abdallah El Hamidi. Necessary conditions for local and global solvability of nondiagonal degenerate systems.

02-10 Abdallah El Hamidi et Amira Obeid. Systems of Semilinear higher order evolution inequalities on the Heisenberg group.

03-01 Abdallah El Hamidi et Gennady G. Laptev. Non existence de solutions d'inéquations semilinéaires dans des domaines coniques.

03-02 Eric Benoît et Marie-Joëlle Rochet. A continuous model of biomass size spectra governed by predation and the effects of fishing on them.

03-03 Catherine Stenger : On a conjecture of Wolfgang Wasow concerning the nature of turning points.

03-04 Christian Houdré et Nicolas Privault. Surface measures and related functional inequalities on configuration spaces.

03-05 Abdallah El Hamidi et Mokhtar Kirane. Nonexistence results of solutions to systems of semilinear differential inequalities on the Heisenberg group.

03-06 Uwe Franz, Nicolas Privault et René Schott. Non-Gaussian Malliavin calculus on real Lie algebras.

04-01 Abdallah El Hamidi. Multiple solutions to a nonlinear elliptic equation involving Paneitz type operators.

04-02 Mohamed Amara, Amira Obeid et Guy Vallet. Relaxed formulation and existence result of the degenerated elliptic small disturbance model.

04-03 Hippolyte d'Albis et Emmanuelle Augeraud-Veron. Competitive Growth in a Life-cycle Model : Existence and Dynamics

04-04 Sadjia Aït-Mokhtar : Third order differential equations with fixed critical points.

04-05 Mokhtar Kirane et Nasser-eddine Tatar. Asymptotic Behavior for a Reaction Diffusion System with Unbounded Coefficients.

04-06 Mokhtar Kirane, Eric Nabana et Stanislav I. Pohozaev. Nonexistence of Global Solutions to an Elliptic Equation with a Dynamical Boundary Condition.

04-07 Khaled M. Furati, Nasser-eddine Tatar and Mokhtar Kirane. Existence and asymptotic behavior for a convection Problem.

04-08 José Alfredo López-Mimbela et Nicolas Privault. Blow-up and stability of semilinear PDE's with gamma generator.

04-09 Abdallah El Hamidi. Multiple solutions with changing sign energy to a nonlinear elliptic equation.

04-10 Sadjia Aït-Mokhtar : A singularly perturbed Riccati equation.

04-11 Mohamed Amara, Amira Obeid et Guy Vallet. Weighted Sobolev spaces for a degenerated nonlinear elliptic equation.

04-12 Abdallah El Hamidi. Existence results to elliptic systems with nonstandard growth conditions.

04-13 Eric Edo et Jean-Philippe Furter : Some families of polynomial automorphisms.

04-14 Laurence Cherfils et Yavdat Il'yasov. On the stationary solutions of generalized reaction diffusion equations with p & q- Laplacian.

04-15 Jean-Christophe Breton et Youri Davydov. Local limit theorem for supremum of an empirical processes for i.i.d. random variables.

04-16 Jean-Christophe Breton, Christian Houdré et Nicolas Privault. Dimension free and infinite variance tail estimates on Poisson space.

04-17 Abdallah El Hamidi et Gennady G. Laptev. Existence and nonexistence results for higher-order semilinear evolution inequalities with critical potential.

05-01 Mokhtar Kirane et Nasser-eddine Tatar. Nonexistence of Solutions to a Hyperbolic Equation with a Time Fractional Damping.

05-02 Mokhtar Kirane et Yamina Laskri. Nonexistence of Global Solutions to a Hyperbolic Equation with a Time Fractional Damping.

05-03 Mokhtar Kirane, Yamina Laskri et Nasser-eddine Tatar. Critical Exponents of Fujita Type for Certain Evolution Equations and Systems with Spatio-Temporal Fractional Derivatives.

05-04 Abdallah El Hamidi et Jean-Michel Rakotoson. Compactness and quasilinear problems with critical exponents

05-05 Claudianor O. Alves et Abdallah El Hamidi. Nehari manifold and existence of positive solutions to a class of quasilinear problems.

05-06 Khalid Adriouch et Abdallah El Hamidi. The Nehari manifold for systems of nonlinear elliptic equations.

05-07 Eric Benoît. Equation fonctionnelle : Transport et convolution.