Prépublications du Département de Mathématiques

Université de La Rochelle
Avenue Marillac
17042 La Rochelle Cedex 1
http ://www.univ-lr.fr/labo/lmca

Solutions canards en des points tournants dégénérés

Thomas Forget

Novembre 2005

Classification : 34E15, 34E18, 34E20.
Mots clés : perturbation singulière, point tournant, solution canard.

2005/09

Solutions canards en des points tournants dégénérés

Thomas Forget

15 janvier 2006

Résumé :
Nous étudions un opérateur défini à partir d'une classe générale d'équations différentielles singulièrement perturbées dans le champ réel ; son caractère contractant permet de conclure à l'existence de solutions canard dans le cas où l'on a un point tournant dégénéré.

Mots clés :
perturbation singulière, point tournant, solution canard

Classification :
34E15, 34E18, 34E20

Nous étudions une classe d'équations différentielles singulièrement perturbées dans le champ réel. Il s'agit d'équations de la forme

$$\varepsilon y' = \Phi(x, y, a, \varepsilon) \tag{1}$$

où la fonction Φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en ses variables, x est une variable réelle, y une fonction réelle de la variable x de classe $\mathcal{C}^1$, a un paramétre réel, et ε un nombre réel strictement positif appellé *petit paramètre* de (1), ce qui signifie que nous nous intéressons au comportement asymptotique des solutions de (1) lorsque ε tend vers 0.

On se place au voisinage d'un point que l'on appelle un *point tournant* ; la définition précise sera donnée dans le paragraphe suivant mais il suffit pour l'instant de savoir que cette propriété implique que l'existence d'une solution de (1) sur tout un voisinage de ce point, dans $\mathbb{R}$, est un phénomène exceptionnel.
C'est dans le but d'obtenir une telle solution, que l'on introduit un paramètre supplémentaire a, dit *paramètre de contrôle*, qui est unidimensionnel ($a \in \mathbb{R}$) dans notre problème, alors que la résolution d'un problème de forme analogue dans le champ complexe [9][1] demande géneriquement de disposer d'un paramètre de contrôle p-dimensionnel, où l'entier p mesure, d'une certaine manière, le degré de dégénérescence du point tournant. Le cas où $p = 1$ étant contenu dans les travaux accomplis dans le champ complexe, nous nous interesserons, dans ces travaux, au cas où $p > 1$, qui est le cas où le point tournant est *dégénéré*.

Notre résultat principal énonce qu'un certain opérateur construit à partir de (1) est contractant.
De ce théorème, nous déduisons un résultat d'existence d'une solution canard [4][10][2] pour (1).
Il est à noter que, dans sa thèse [3], Peter de Maesschalck a obtenu un résultat d'existence d'une solution canard, pour une classe d'équations moins générale, en se basant sur une méthode d'éclatement [6][8] de la singularité.

Le démonstration de ce résultat a été rédigée dans le cadre de l'analyse nonstandard [7][5], dans la version IST de Nelson, ceci pour des raisons de simplicité de formulation des questions posées, et de rédaction. Néanmoins, le résultat principal est écrit de manière tout à fait standard.

L'auteur remercie Eric Benoît pour l'encadrement apporté, Guy Wallet pour ses conseils de rédaction de ce papier, et la région Poitou-Charentes pour l'aide apportée au financement de ses travaux.

1 Mise sous forme préparée

Afin d'étudier et de préciser le problème que l'on se pose, nous allons mettre l'équation sous une forme plus appropriée dite *forme préparée.*
Quitte à effectuer une translation, nous supposerons que le point tournant est 0.
Nous supposons l'existence d'une *courbe lente*, c'est à dire l'existence d'un couple (a_0, y_0) qui vérifie

$$a_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathcal{C}^1 \text{ et } \forall x,\ \Phi(x, y_0(x), a_0, 0) = 0$$

En effectuant le changement

$$\left\{ \begin{array}{l} u := y - y_0 \\ \alpha := a - a_0 \end{array} \right.$$

nous arrivons alors à une équation de la forme

$$\varepsilon u' = \Psi(x, u, \alpha, \varepsilon)$$

où la fonction Ψ vérifie

$$\forall x,\ \Psi(x, 0, 0, 0) = 0$$

Nous supposerons que la fonction Ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Pour étudier les régions où les solutions longent la courbe lente, il suffit alors de regarder l'attractivité de cette courbe et, pour se mettre dans les conditions d'apparition de canards, nous supposerons donc que

$$\frac{\partial}{\partial u}\Psi(x, 0, 0, 0) \text{ est } \left\{ \begin{array}{l} < 0 \text{ si } x < 0 \\ \\ > 0 \text{ si } x > 0 \end{array} \right.$$

Afin de nous placer dans des hypothèses d'existence d'un point tournant, nous supposons, de plus, que $\frac{\partial}{\partial u}\Psi(x, 0, 0, 0)$ admet un zéro en $x = 0$ d'ordre p qui, au vu de l'hypothèse précédente, est nécessairement un entier impair.
Cette fonction est donc de la forme $x^p(C + T(x))$ avec $C > 0$ et $T(0) = 0$.
Quitte à effectuer un changement de variable sur x, nous considérerons que ce terme est $(p+1)x^p$, donc que $\frac{\partial}{\partial u}\Psi(x, 0, 0, 0) = (p+1)x^p$.

L'application d'une formule de Taylor d'ordre 1 nous permet alors d'obtenir la décomposition :

$$\Psi(x, u, \alpha, \varepsilon) = \alpha T_1(x, \alpha) + u\left((p+1)x^p + \alpha T_2(x, \alpha) + u T_3(x, u, \alpha)\right) + \varepsilon T_4(x, u, \alpha, \varepsilon)$$

Nous faisons maintenant 3 hypothèses moins naturelles mais imposées par les démonstrations qui vont suivre :

1. Le terme T_2 est nul.
   (i.e. : *il n'y a pas de terme admettant αu en facteur sans un ε.*)
2. Le terme T_3 est nul.
   (i.e. : *il n'y a pas de terme admettant u^2 en facteur sans un ε .*)
3. $\alpha T_1(x, \alpha) = \alpha x^L + \sum_i \alpha^{k_i} x^{l_i}$

où la somme sur i est finie, L est un entier pair inférieur à p et, pour tout i, l_i et k_i sont deux entiers tels que $l_i > L$ et $k_i \neq 0$.
Dans la suite, les termes $\sum_i \alpha^{k_i} x^{l_i}$ et $\varepsilon T_4(x, u, \alpha, \varepsilon)$ ont un rôle marginal, alors que $x^p u$ et αx^L sont les termes importants .

Nous nous sommes ainsi ramenés à l'étude des équations de la forme

$$\varepsilon u' = (p+1)x^p u + \alpha x^L + \sum_i \alpha^{k_i} x^{l_i} + \varepsilon P(x,u,\alpha,\varepsilon)$$

L'étude de ce type d'équation montre que la quantité infiniment petite pertinente est $\varepsilon^{1/(p+1)}$; pour cette raison, et afin de gagner en généralité, nous considérerons P comme étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ en $\eta := \varepsilon^{1/(p+1)}$ au lieu de ε, et étudierons donc les équations de la forme plus génerale

$$\eta^{p+1} u' = (p+1)x^p u + \alpha x^L + \sum_i \alpha^{k_i} x^{l_i} + \eta^{p+1} P(x,u,\alpha,\eta) \tag{2}$$

Dans la suite, nous sommes intéressés à montrer l'existence de solutions (α, u) longeant la courbe lente $u_0(x) = 0$ sur tout un voisinage du point tournant 0.

Les figures qui suivent montrent quelques trajectoires, solutions de l'équation $\varepsilon u' = x^5 u + \alpha x^4 + \varepsilon x^2$ avec $\varepsilon = 0.1$, $-5 < x < 5$, et $-1.5 < u < 1.5$ dans laquelles nous faisons varier le paramètre α :

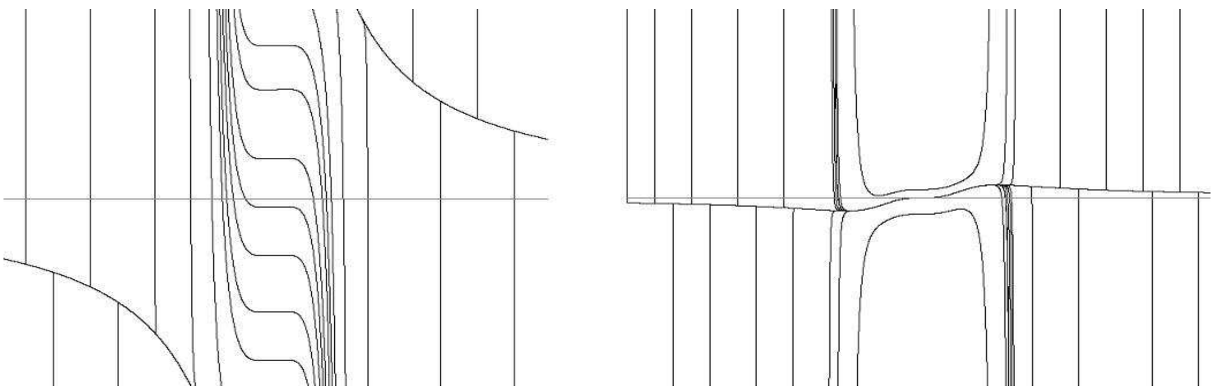

FIG. 1 – Champ des solutions pour $\alpha = -2$ et $\alpha = -0.186172$

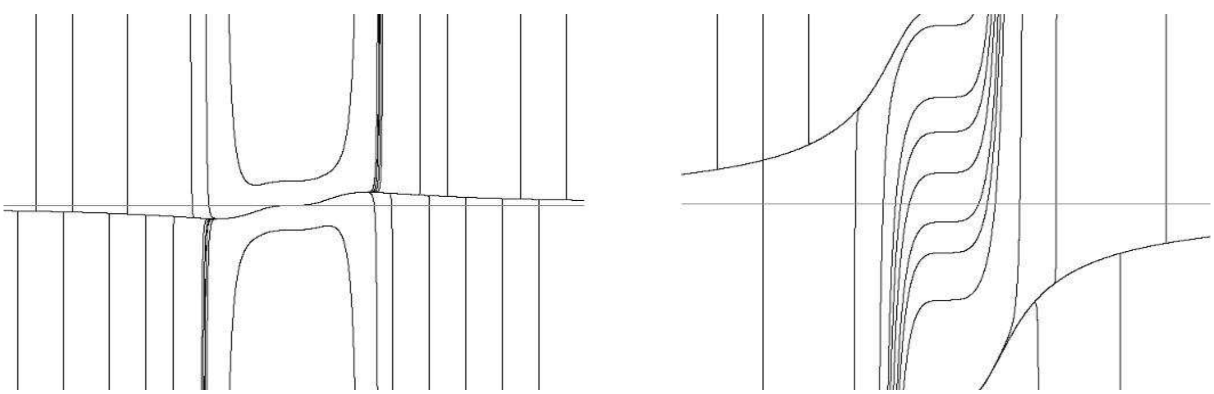

FIG. 2 – Champ des solutions pour $\alpha = -0.186171$ et $\alpha = 1$

Ces figures permettent de conjecturer que les valeurs à canard vivent dans l'intervalle $]-0.186172, -0.186171[$.

2 Enoncé général

2.1 Le théorème principal

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^4$ contenant 0, et soient alors $(x_0, A, B, \tilde{\eta})$, tous strictement positifs, tels que $[-x_0, x_0] \times [-A, A] \times [-B, B] \times [0, \tilde{\eta}] \subset \Omega$.

Dans la suite, E désignera l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[-x_0, x_0]$, et nous le munissons de la norme $||v||_\infty := \sup_{x \in [-x_0, x_0]}\{|v(x)|\}$.
L'ensemble $\mathbb{R} \times E$ sera, quant à lui, muni de la norme

$$|(\beta, v)|_\infty := \max\{|\beta|, ||v||_\infty\}$$

Munis de ces normes, les espaces $(E, ||.||_\infty)$ et $(\mathbb{R} \times E, |.|_\infty)$ sont tous deux des espaces de Banach.

Conformément aux notations utilisées dans la section précédente, p est un entier impair, et L est un entier pair tel que $L < p$.
Nous noterons par $s(x, \alpha)$ le polynôme $\sum_i \alpha^{k_i} x^{l_i}$ où, pour tout i, l_i et k_i sont des entiers tels que $l_i > L$, et $k_i \geq 1$.
Nous supposons que P est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de Ω dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $M > 0$, nous désignerons par $\mathcal{B}_M$ l'ensemble $\{v \in E; ||v||_\infty \leq M\}$.

Notation :
Pour $\eta \in]0, \tilde{\eta}[$, nous notons Ξ_η la relation définie, pour (β, v) et (α, u) éléments de $[-B, B] \times \mathcal{B}_A$, par $(\beta, v)\Xi_\eta(\alpha, u)$ si et seulement si u est dérivable sur $[-x_0, x_0]$ et, pour tout $x \in [-x_0, x_0]$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \eta^{p+1}u'(x) = (p+1)x^p u(x) + \alpha x^L + s(x, \alpha) + \eta^{p+1}P(x, v(x), \beta, \eta) \\ \\ u(x_0) = 0 = u(-x_0) \end{array} \right.$$

Théorème 1. *Pour tout $\delta_1 \in]0, B[$ et $\delta_2 \in]0, A[$, il existe $\eta_0 > 0$ tel que, pour tout $\eta \in]0, \eta_0[$, la relation $(\beta, v)\Xi_\eta(\alpha, u)$ induit une application $\Xi_\eta : (\beta, v) \mapsto (\alpha, u)$ de $[-\delta_1, \delta_1] \times \mathcal{B}_{\delta_2}$ dans lui-même .*
De plus, cette application est contractante pour la distance associée à la norme $|.|_\infty$.

Soient $\delta_1 \in]0, B[$, $\delta_2 \in]0, A[$, et η_0 donné par le théorème, prenons $\eta \in]0, \eta_0[$.
Puisque $[-\delta_1, \delta_1] \times \mathcal{B}_{\delta_2}$ est un fermé de l'espace de Banach $(\mathbb{R} \times E, |.|_\infty)$, on en déduit que Ξ_η admet un point fixe $(\alpha_\eta, u_\eta) \in [-\delta_1, \delta_1] \times \mathcal{B}_{\delta_2}$.
Ce qui permet alors d'écrire

$$\left\{ \begin{array}{c} \eta^{p+1}u_\eta'(x) = (p+1)x^p u_\eta(x) + \alpha_\eta x^L + s(x, \alpha_\eta) + \eta^{p+1}P(x, u_\eta(x), \alpha_\eta, \eta) \\ \\ u_\eta(x_0) = 0 = u_\eta(-x_0) \end{array} \right. \tag{3}$$

Corollaire 1. *Pour tout $\delta_1 \in]0, B[$ et $\delta_2 \in]0, A[$, il existe $\eta_0 > 0$ tel que, pour tout $\eta \in]0, \eta_0[$, le système (3) admet une unique solution $(\alpha_\eta, u_\eta) \in [-\delta_1, \delta_1] \times \mathcal{B}_{\delta_2}$.*
De plus, $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ étant fixé, la famille $(u_\eta)_{\eta \in]0, \eta_0[}$ converge uniformément vers 0 sur $[-t_0, t_0]$ lorsque η tend vers 0.

Pour tout $\delta' \in]0, \delta[$, le théorème 1 montre l'existence d'un $\eta_0' > 0$ tel que, pour chaque $\eta \in]0, \eta_0'[$, l'application Ξ_η admet un unique point fixe (α_η', u_η') dans $[-\delta', \delta'] \times \mathcal{B}_{\delta'}$.
Comme, pour tout $\eta \in]0, \min\{\eta_0, \eta_0'\}[$, on a $(\alpha_\eta', u_\eta') = (\alpha_\eta, u_\eta)$, on en tire que $||u_\eta||_\infty \leq \delta'$.

2.2 Approche nonstandard du problème

Nous nous proposons de prouver un théorème externe (résultat nonstandard) suffisant pour déduire le théorème 1.
L'intérêt principal de cette approche est de permettre une manipulation plus aisée des ordres de grandeur sans avoir à introduire de constantes artificielles.
Dans ce but, nous utilisons l'analyse nonstandard, dans la version IST (Internal Set Theory) due à Nelson (voir [7]).
Ce cadre permet d'utiliser les ordres de grandeur suivants :
- Le mot *standard* désigne tout objet usuel.
- Un nombre réel x est dit *infiniment grand* s'il est plus grand, en valeur absolue, que tout nombre réel standard.
  On note $x \simeq \infty$.
- Un nombre réel x est dit *limité* s'il n'est pas infiniment grand.
  On note $x = \pounds$.
- Un nombre réel x est dit *infiniment petit* s'il est plus petit, en valeur absolue, que tout nombre réel standard strictement positif.
  On note $x \simeq 0$ ou encore $x = \oslash$.
- Un nombre réel x est dit *appréciable* s'il n'est ni infiniment petit, ni infiniment grand.
  On note $x = @$.

Désormais, nous supposons que η est un nombre réel strictement positif infiniment petit fixé, que p, L, s et P sont standard . Il en découle que l'on peut supposer que x_0, A, B sont trois élements standard de $\mathbb{R}_+^*$.

Le paramètre η étant fixé, nous notons Ξ la relation Ξ_η, définie par :
$(\beta, v)\Xi(\alpha, u) \Leftrightarrow u$ est dérivable sur $[-x_0, x_0]$ et, pour tout $x \in [-x_0, x_0]$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \eta^{p+1}u'(x) = (p+1)x^p u(x) + \alpha x^L + s(x,\alpha) + \eta^{p+1}P(x, v(x), \beta, \eta) \\ \\ u(x_0) = 0 = u(-x_0) \end{array} \right.$$

Théorème 2. *Sous les hypothèses précédentes, on a les propriétés suivantes :*
- *La relation $(\beta, v)\Xi(\alpha, u)$ induit une application $\Xi : (\beta, v) \mapsto (\alpha, u)$ de $[-B, B] \times \mathcal{B}_A$ dans lui-même qui est contractante de constante de contraction égale à $\pounds\eta$, pour la distance associée à la norme $|.|_\infty$.*
- *L'image $\Xi([-B, B] \times \mathcal{B}_A)$ est contenue dans l'ensemble externe*

$$\{(\alpha, u) \in \mathbb{R} \times E : |(\alpha, u)|_\infty = \pounds\eta\}$$

Corollaire 2. *Il existe un unique $\alpha \in [-B, B]$, et un unique $u \in \mathcal{B}_A$, tels que pour tout $x \in [-x_0, x_0]$:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \eta^{p+1}u'(x) = (p+1)x^p u(x) + \alpha x^L + s(x,\alpha) + \eta^{p+1}P(x, u(x), \alpha, \eta) \\ \\ u(x_0) = 0 = u(-x_0) \end{array} \right.$$

(α, u) est une solution canard de (3).

Montrons que le théorème 2 implique le théorème 1 :
Soit $\delta \in]0, \min\{A, B\}[$, standard, alors, pour tout η_0 strictement positif infiniment petit, la conclusion du théorème 1 est vérifiée.
Par application du principe de transfert, on en déduit le théorème 1 .

Preuve du corollaire 2 :
En appliquant le théorème du point fixe à l'espace complet standard $[-B, B] \times \mathcal{B}_A$, en tant que sous-espace fermé de l'espace de Banach $\mathbb{R} \times E$, on en déduit que Ξ admet un unique point fixe limité, qui est le canard recherché.
Et, réciproquement, le canard s'obtient par calcul du point fixe de cette application.

3 Démonstration du théorème 2

Afin de démontrer le théorème 2, nous introduisons dans un premier temps une application intermédiaire Θ dont l'étude nous permettra d'en déduire les propriétés recherchées de la fonction Ξ.

3.1 Etude préparatoire : L'application Θ

Résultat préparatoire :
Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, notons

$$J_k := \int_{-x_0}^{x_0} \xi^k e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

On remarque que, lorsque k est impair, $J_k = 0$ et que, lorsque k est pair, on a

$$J_k = 2\frac{\eta^{k+1}}{p+1} \int_0^{(x_0/\eta)^{p+1}} s^{(k-p)/(p+1)} e^{-s} ds$$

Du fait que $x_0/\eta \simeq \infty$, on en déduit que

$$J_k = 2\frac{\eta^{k+1}}{p+1} \left(\Gamma(\frac{k+1}{p+1}) + \oslash \right) = @\eta^{k+1}$$

où Γ désigne la fonction gamma $\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} s^{z-1} e^{-s} ds$.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$J_k = £\eta^{k+1}$$

Notons aussi que, si $||Q||_\infty = £$, alors

$$\left| \int_{-x_0}^{x_0} Q(\xi) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| \leq ||Q||_\infty J_0 = £\eta$$

Proposition 1. *Soit $Q \in \mathcal{C}^0([-x_0, x_0], \mathbb{R})$, telle que $||Q||_\infty = £$.*
Alors le problème aux limites

$$\begin{cases} \eta^{p+1} u'(x) = (p+1) x^p u(x) + \alpha x^L + s(x, \alpha) + \eta^{p+1} Q(x) \\ u(x_0) = 0 = u(-x_0) \end{cases}$$

admet une unique solution $(\alpha, u) \in \mathbb{R} \times E$ telle que α soit limité.
De plus, $\alpha = £\eta^{p-L+1}$.

Pour chaque $Q \in E$ tel que $||Q||_\infty$ soit limité, on désignera désormais par $\Theta(Q)$ le couple $(\alpha, u) \in \mathbb{R} \times E$ ainsi obtenu.

Preuve de la proposition :
Montrons que Θ est bien définie :
La solution (α, u) de l'équation (2) :

$$\eta^{p+1} u'(x) = (p+1) x^p u(x) + \alpha x^L + \sum_i \alpha^{k_i} x^{l_i} + \eta^{p+1} Q(x)$$

admettant comme condition initiale $u(-x_0) = 0$ est

$$u(x) = \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(x/\eta)^{p+1}} \int_{-x_0}^{x} (\alpha \xi^L + \sum_i \alpha^{k_i} \xi^{l_i} + \eta^{p+1} Q(\xi)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

Comme elle doit aussi vérifier que $u(x_0) = 0$, on en déduit que

$$0 = \alpha. \int_{-x_0}^{x_0} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \sum_i \alpha^{k_i} . \int_{-x_0}^{x_0} \xi^{l_i} e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \eta^{p+1} \int_{-x_0}^{x_0} Q(\xi) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \tag{4}$$

Finalement, et de par les estimations précédentes sur la fonction J_k, l'équation (4) se met sous la forme

$$\alpha.@\eta^{L+1} + \sum_i \alpha^{k_i} .\pounds\eta^{l_i+1} + \eta^{p+1}.\pounds\eta = 0$$

Que l'on réécrit

$$\alpha.@ + \sum_i \alpha^{k_i} .\pounds\eta^{l_i-L} + \pounds\eta^{p-L+1} = 0$$

Le lemme suivant permet alors de conclure :

Lemme 1. *Soit $\Pi \in \mathbb{R}[\lambda]$, de degré n standard, tel que*

$$\Pi(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$$

avec $a_1 = @$, et $\forall j \neq 1, a_j = \oslash$
Alors P admet une et une seule racine limitée, et celle-ci est infinitésimale.

Preuve du lemme :
On a, pour tout réel standard λ :

$$\Pi(\lambda) \simeq @\lambda$$

Par suite, le théorème des valeurs intermédiaires implique que Π admet au moins une racine qui soit limitée, et celle-ci est proche de 0.
De plus Π est monotone lorsque λ reste limité, car sa dérivée Π' s'écrit alors $@ + \oslash \not\simeq 0$, et ainsi Π n'admet aucune autre racine limitée.

$\square$

Montrons l'estimation de l'ordre de grandeur de α :
Nous avons montré que

$$@.\alpha + \sum_i \alpha^{k_i} \pounds\eta^{l_i-L} = \pounds\eta^{p-L+1}$$

Etant donné que nous avons l'existence et l'unicité d'un α infinitésimal qui soit solution, recherchons son ordre de grandeur :
L'équation

$$\alpha + \sum_i \alpha^{k_i} \pounds\eta^{l_i-L} = \pounds\eta^{p-L+1}$$

se réécrit

$$\alpha \left(1 + \sum_i \alpha^{k_i-1}.\pounds\eta^{l_i-L}\right) = \pounds\eta_{p-L+1}$$

Le second terme de la somme étant infinitésimal, car $k_i \geq 1$ et $l_i > L$, on en déduit que

$$\alpha = \pounds\eta^{p-L+1}$$

$\square$

Nous montrons maintenant le caractère lipschitzien de Θ *:*

Proposition 2. *Soient* Q_1 *et* Q_2 *deux élements de* $\mathcal{C}^0([-x_0, x_0], \mathbb{R})$ *tels que* $||Q_1||_\infty = \pounds$ *et* $||Q_2||_\infty = \pounds$, *alors*

$$|\Theta(Q_2) - \Theta(Q_1)|_\infty = \pounds\eta||Q_2 - Q_1||_\infty$$

<u>Preuve :</u>
Ecrivons $(\alpha_j, u_j) := \Theta(Q_j)$, $j \in \{1, 2\}$, la proposition 1 affirme leur existence.
$\otimes$ <u>Etude de $|\alpha_2 - \alpha_1|$:</u>
En reprenant les calculs de la proposition 1 on a, pour $j \in \{1, 2\}$:

$$0 = \alpha_j. \int_{-x_0}^{x_0} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \sum_i \alpha_j^{k_i}. \int_{-x_0}^{x_0} \xi^{l_i} e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \eta^{p+1} \int_{-x_0}^{x_0} Q_j(\xi) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

Par différence,

$$0 = (\alpha_2 - \alpha_1). \int_{-x_0}^{x_0} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + ...$$

$$... + \sum_i (\alpha_2^{k_i} - \alpha_1^{k_i}). \int_{-x_0}^{x_0} \xi^{l_i} e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \eta^{p+1} \int_{-x_0}^{x_0} (Q_2(\xi) - Q_1(\xi)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

En écrivant $\alpha_2^{k_i} - \alpha_1^{k_i} = (\alpha_2 - \alpha_1)\pi_{k_i}(\alpha_1, \alpha_2)$ et, selon le lemme 3 donné en annexe,

$$0 = (\alpha_2 - \alpha_1) \left(@\eta^{L+1} + \sum_i \pi_{k_i}(\alpha_1, \alpha_2).\pounds\eta^{\min\{l_i, p\}+1} \right) + \eta^{p+1} \int_{-x_0}^{x_0} (Q_2(\xi) - Q_1(\xi)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

Ce que l'on réécrit, par division par η^{L+1},

$$0 = (\alpha_2 - \alpha_1) \left(@ + \sum_i \pi_{k_i}(\alpha_1, \alpha_2).\pounds\eta^{\min\{l_i, p\}-L} \right) + \eta^{p-L} \int_{-x_0}^{x_0} (Q_2(\xi) - Q_1(\xi)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

Or, $\eta^{\min\{l_i, p\}-L}$ étant infinitésimal et $\pi_{k_i}(\alpha_1, \alpha_2)$ est limité (car α_1 et α_2 sont infinitésimaux), on en déduit que

$$@(\alpha_2 - \alpha_1) + \eta^{p-L} \int_{-x_0}^{x_0} (Q_2(\xi) - Q_1(\xi)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi = 0$$

Et, par suite,

$$|\alpha_2 - \alpha_1| = \pounds\eta^{p-L}.2 \int_0^{x_0} e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi.||Q_2 - Q_1||_\infty$$

Donc, et selon le lemme 2 donné en annexe,

$$|\alpha_2 - \alpha_1| = \pounds\eta^{p-L+1}.||Q_2 - Q_1||_\infty$$

$\otimes$ <u>Etude de $||u_2 - u_1||_\infty$:</u>
Nous travaillerons sur $[0, x_0]$ (*Le résultat sur* $[-x_0, 0]$ *se montrant de même.*)
La solution de l'équation (2) admettant comme condition initiale $u(x_0) = 0$ est

$$u(x) = \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(x/\eta)^{p+1}} \int_{x_0}^{x} (\alpha\xi^L + \sum_i \alpha^{k_i}\xi^{l_i} + \eta^{p+1}Q(\xi)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

ce qui permet de déduire que, pour tout x :

$$|u_2(x) - u_1(x)| \leq \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(x/\eta)^{p+1}}.\pounds\eta^{p-L+1}.||Q_2 - Q_1||_\infty \left| \int_{x_0}^{x} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| + ...$$

$$... + \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(x/\eta)^{p+1}} \sum_i \left(\pounds \eta^{p-L+1}.||Q_2 - Q_1||_\infty \right)^{k_i} \left| \int_{x_0}^{x} \xi^{l_i} e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| + ...$$

$$... + e^{(x/\eta)^{p+1}} \left| \int_{x_0}^{x} e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| ||Q_2 - Q_1||_\infty$$

$\oplus$ ***Etude de*** $T_1 := \pounds \frac{1}{\eta^{p+1}} \eta^{p-L+1} e^{(x/\eta)^{p+1}} \left| \int_x^{x_0} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| ||Q_2 - Q_1||_\infty$
Selon le lemme 2 donné en annexe,

$$T_1 = \pounds \eta^{-L} e^{(x/\eta)^{p+1}} . \pounds \eta^{L+1} e^{-(x/\eta)^{p+1}} ||Q_2 - Q_1||_\infty$$

Et ainsi

$$T_1 = \pounds \eta ||Q_2 - Q_1||_\infty$$

$\oplus$ ***Etude de*** $T_2 := \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(x/\eta)^{p+1}} \sum_i \left(\pounds \eta^{p-L+1} ||Q_2 - Q_1||_\infty \right)^{k_i} \left| \int_x^{x_0} \xi^{l_i} e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right|$.
Ecrivons

$$T_2 = \sum_i \left(\frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(x/\eta)^{p+1}} \pounds \eta^{k_i(p-L+1)} \left| \int_x^{x_0} \xi^{l_i} e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| ||Q_2 - Q_1||_\infty^{k_i} \right)$$

Et considérons alors

$$I_i := \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(x/\eta)^{p+1}} \pounds \eta^{k_i(p-L+1)} \left| \int_x^{x_0} \xi^{l_i} e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| ||Q_2 - Q_1||_\infty^{k_i}$$

Selon le lemme 3 donné en annexe, on en déduit que

$$I_i = \pounds \eta^{-p-1+k_i(p+1-L)+\min\{l_i,p\}+1} ||Q_1 - Q_2||_\infty^{k_i} = \pounds \eta^{(k_i-1)(p+1-L)+\min\{l_i,p\}-L+1} ||Q_1 - Q_2||_\infty^{k_i}$$

Comme $k_i \geq 1$ et $l_i \geq L$, alors $(k_i - 1)(p + 1 - L) + \min\{l_i, p\} - L + 1 \geq 1$.
D'où

$$T_2 = \pounds \eta ||Q_2 - Q_1||_\infty^{k_i}$$

$\oplus$ ***Etude de*** $T_3 := e^{(x/\eta)^{p+1}} \left| \int_x^{x_0} e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| ||Q_2 - Q_1||_\infty$.
Par le lemme 2 donné en annexe,

$$T_3 = \pounds \eta ||Q_2 - Q_1||_\infty$$

On a donc montré que, pour tout $x \in [-x_0, x_0]$, on a

$$|u_2(x) - u_1(x)| = \left(\pounds \eta + \sum_i \pounds \eta ||Q_2 - Q_1||_\infty^{k_i - 1} + \pounds \eta \right) .||Q_2 - Q_1||_\infty$$

k_i étant supérieur à 1, et $||Q_2 - Q_1||_\infty$ restant limité, on en déduit que

$$||u_2 - u_1||_\infty = \pounds \eta ||Q_2 - Q_1||_\infty$$

Par suite,

$$|(\alpha_2, u_2) - (\alpha_1, u_1)|_\infty = \pounds \eta ||Q_2 - Q_1||_\infty$$

$\square$

Lorsque $C^0([-x_0, x_0], \mathbb{R})$ est muni de la norme canonique $||.||_\infty$, et que l'ensemble $[-B, B] \times \mathcal{B}_A$ est muni de la norme sous-jacente $|.|_\infty$, nous avons ainsi montré que Θ est une application lipschitzienne, de constante de Lipschitz égale à $\pounds \eta$.

3.2 Démonstration du premier point du théorème 2

Selon la proposition 1, la relation $(\beta, v)\Xi(\alpha, u)$ induit une fonction $\Xi : (\beta, v) \mapsto (\alpha, u)$.
Soient (β_1, v_1) et (β_2, v_2) deux points de $[-B, B] \times \mathcal{B}_A$, on a

$$\Xi(\beta_2, v_2) - \Xi(\beta_1, v_1) = \Theta(Q_2) - \Theta(Q_1)$$

où, pour $j \in \{1, 2\}$, Q_j est défini par $Q_j(x) := P(x, v_j(x), \beta_j, \eta)$.
On a donc, par définition

$$|\Xi(\beta_2, v_2) - \Xi(\beta_1, v_1)|_\infty = |\Theta(Q_2) - \Theta(Q_1)|_\infty$$

Comme, pour tout $j \in \{1, 2\}, (\beta_j, v_j)$ appartient au compact $[-B, B] \times \mathcal{B}_A$ alors, et par continuité, Q_j reste limité sur tout $[-x_0, x_0]$, la proposition 2 implique alors que

$$|\Xi(\beta_2, v_2) - \Xi(\beta_1, v_1)|_\infty = \pounds\eta.||Q_2 - Q_1||_\infty$$

D'aprés le théorème des accroissements finis, on a ainsi

$$||Q_2 - Q_1||_\infty \leq \sup_{\xi \in [-x_0, x_0] \times [-A, A] \times [-B, B] \times [0, \tilde{\eta}]} \{||dP(\xi)||\}.|(\beta_2, v_2) - (\beta_1, v_1)|_\infty$$

Du fait que dP est standard continue et que $[-x_0, x_0] \times [-A, A] \times [-B, B] \times [0, \tilde{\eta}]$ est compact, on a alors que

$$\sup_{\xi \in [-x_0, x_0] \times [-A, A] \times [-B, B] \times [0, \tilde{\eta}]} \{||dP(\xi)||\} = \pounds$$

Et, par suite,

$$||Q_2 - Q_1||_\infty \leq \pounds|(\beta_2, v_2) - (\beta_1, v_1)|_\infty$$

D'où l'on déduit que

$$|\Xi(\beta_2, v_2) - \Xi(\beta_1, v_1)|_\infty = \pounds\eta|(\beta_2, v_2) - (\beta_1, v_1)|_\infty$$

□

3.3 Démonstration du second point du théorème 2

Soit $(\beta, v) \in [-B, B] \times \mathcal{B}_A$, puisque $\eta \simeq 0$ et que P est une fonction standard continue définie sur le compact standard

$$[-x_0, x_0] \times [-A, A] \times [-B, B] \times [0, \tilde{\eta}]$$

alors $Q(x) := P(x, v(x), \beta, \eta)$ est limité pour tout $x \in [-x_0, x_0]$.
Nous cherchons à montrer que

$$\Xi\left([-B, B] \times \mathcal{B}_A\right) \subset \{(\alpha, u) : |(\alpha, u)|_\infty = \pounds\eta\}$$

<u>Preuve :</u>
Soit $(\beta, v) \in [-B, B] \times \mathcal{B}_A$, on a alors $|(\beta, v)|_\infty = \pounds$, considérons le système

$$\begin{cases} \eta^{p+1}u'(x) = (p+1)x^p u(x) + \alpha x^L + s(x, \alpha) + \eta^{p+1}Q(x) \\ \\ u(x_0) = 0 = u(-x_0) \end{cases}$$

où $Q(x) := P(x, v(x), \beta, \eta)$ est limitée sur tout l'intervalle $[-x_0, x_0]$.
Comme $||Q||_\infty = \pounds$, alors et par la proposition 1, nous avons $\alpha = \pounds\eta^{p-L+1}$.

Etudions l'ordre de grandeur de $||u||_\infty$ sur $[0, x_0]$:
(*l'étude sur* $[-x_0, 0]$ *se faisant de même*) :
De par les calculs de la proposition 1, on a

$$u(x) = \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(x/\eta)^{p+1}} \int_{x_0}^{x} \left(\alpha\xi^L + \sum_i \alpha^{k_i}\xi^{l_i} + \eta^{p+1}Q(\xi) \right) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi =$$

$$= e^{(x/\eta)^{p+1}} . \left(\frac{1}{\eta^{p+1}} \alpha \int_{x_0}^{x} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \frac{1}{\eta^{p+1}} \sum_i \alpha^{k_i} \int_{x_0}^{x} \xi^{l_i} e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \int_{x_0}^{x} Q(\xi) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right)$$

En appliquant le lemme 3 donné en annexe, et en se rappellant que Q reste limité sur $[-x_0, x_0]$, on arrive alors à

$$|u(x)| \leq e^{(x/\eta)^{p+1}} . \left(\frac{1}{\eta^{p+1}} . \pounds\eta^{p-L+1} . @\eta^{L+1} e^{-(x/\eta)^{p+1}} + ... \right.$$

$$\left. ... + \frac{1}{\eta^{p+1}} \sum_i \pounds\eta^{k_i(p-L+1)} . \pounds\eta^{l_i+1} e^{-(x/\eta)^{p+1}} + \pounds.\pounds\eta e^{-(x/\eta)^{p+1}} \right)$$

D'où, pour tout $x \in [-x_0, x_0]$, $|u(x)| = \pounds\eta$, ce qui se traduit par

$$||u||_\infty = \pounds\eta$$

□

Remarque :
Notons que nous avons montré en fait que si $|(\beta, v)|_\infty = \pounds$ ***alors*** $|(\alpha, u)|_\infty = \pounds\eta$.

Annexe

Lemme 2. *Soit $x_0 > 0$ un nombre réel standard, $x \in [0, x_0]$, $p, q \in \mathbb{N}$, et $\eta > 0$ tel que $\eta \simeq 0$.*
Soit $I_q : x \mapsto \int_x^{x_0} \xi^q e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$, alors :

$$I_q(x) = \begin{cases} @\eta^{q+1} = @\eta^{q+1} e^{-(x/\eta)^{p+1}} & \textit{si } |x| = \pounds\eta \\ \\ \pounds\eta^{q+1} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{q-p} e^{-(x/\eta)^{p+1}} & \textit{si } x \neq \pounds\eta \end{cases}$$

En particulier, lorsque $q < p$, nous pouvons écrire

$$I_q(x) = \pounds\eta^{q+1} e^{-(x/\eta)^{p+1}}$$

On cherche une estimation de ce type d'intégrale en fonction des divers paramètres.
D'une certaine manière, il s'agit d'un problème d'asymptotique à plusieurs paramètres pour lequel les techniques nonstandard sont bien adaptées.

Preuve du lemme 2 :
Le changement de variable $t := \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{p+1}$ donne l'expression

$$I_q(x) = \frac{\eta^{q+1}}{p+1} \int_{(x/\eta)^{p+1}}^{(x_0/\eta)^{p+1}} t^{\frac{q-p}{p+1}}\, e^{-t}\, dt$$

qui présente l'avantage que les deux paramètres x et η n'apparaissent plus dans la fonction à intégrer.

- Cas où x est au plus de l'ordre de η :
Dans ce cas, $\frac{x}{\eta}$ est limité, et il existe donc un unique nombre standard $a \in [0, x_0]$ tel que $\left(\frac{x}{\eta}\right)^{p+1} \simeq a$.
Comme la fonction intégrée est elle-même standard et intégrable, on a

$$I_q(x) = \frac{\eta^{q+1}}{p+1} \left(\int_a^{+\infty} t^{\frac{q-p}{p+1}}\, e^{-t}\, dt + \oslash \right)$$

d'où l'on déduit l'estimation

$$I_q(x) = @\eta^{q+1}$$

- Cas où x est d'ordre strictement plus grand que η :
Maintenant, on a $\left(\frac{x}{\eta}\right)^{p+1} \simeq +\infty$ et les deux bornes de l'intégrale sont infiniment grandes. On ramène la plus petite à 0 par le changement de variables $t := \left(\frac{x}{\eta}\right)^{p+1} + v$, ce qui conduit à la nouvelle expression

$$I_q(x) = \frac{\eta^{p+1}}{p+1}\, x^{q-p}\, e^{-(x/\eta)^{p+1}} \int_0^{(x_0/\eta)^{p+1} - (x/\eta)^{p+1}} \left(1 + \left(\frac{\eta}{x}\right)^{p+1} v\right)^{\frac{q-p}{p+1}} e^{-v}\, dv$$

On remarque que

$$0 \leq \int_0^{(x_0/\eta)^{p+1} - (x/\eta)^{p+1}} \left(1 + \left(\frac{\eta}{x}\right)^{p+1} v\right)^{\frac{q-p}{p+1}} e^{-v}\, dv \leq \int_0^{+\infty} \left(1 + \left(\frac{\eta}{x}\right)^{p+1} v\right)^{\frac{q-p}{p+1}} e^{-v}\, dv$$

et que, la dernière fonction intégrée est dominée par la fonction $v \mapsto (1+v)^{\frac{q-p}{p+1}}\, e^{-v}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$. Puisque $\frac{\eta}{x} \simeq 0$, et par continuité sous le signe somme, on a

$$\int_0^{+\infty} \left(1 + \left(\frac{\eta}{x}\right)^{p+1} v\right)^{\frac{q-p}{p+1}} e^{-v}\, dv \simeq \int_0^{+\infty} e^{v}\, dv = 1$$

On en déduit

$$0 \le I_q(x) \le \frac{\eta^{p+1}}{p+1}\, x^{q-p}\, e^{-(x/\eta)^{p+1}}\,(1+\oslash)$$

ce qui mène à l'estimation finale

$$I_q(x) = \pounds\eta^{p+1}\, x^{q-p}\, e^{-(x/\eta)^{p+1}}$$

$\square$

Lemme 3. *En reprenant les notations du lemme précédent, mais en se donnant q entier limité quelconque, nous pouvons écrire*

$$I_q(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \pounds\eta^{q+1}e^{-(x/\eta)^{p+1}} & \textit{si } q \le p \\ & \\ \pounds\eta^{p+1}e^{-(x/\eta)^{p+1}} & \textit{si } q \ge p \end{array} \right. = \pounds\eta^{\min\{q,p\}+1}e^{-(x/\eta)^{p+1}}$$

<u>Preuve du lemme 3 :</u> En intégrant par partie la fonction

$$I_{q+p+1}(x) = \int_x^{x_0} \xi^{q+p+1}e^{-(\xi/\eta)^{p+1}}d\xi = \frac{-1}{p+1}\eta^{p+1}\int_x^{x_0} \xi^{q+1}.\left(\frac{-(p+1)\xi^p}{\eta^{p+1}}e^{-(\xi/\eta)^{p+1}}\right)d\xi$$

nous arrivons à l'écriture

$$\begin{aligned} I_{q+p+1}(x) &= \eta^{p+1}\left(\frac{-1}{p+1}(x_0^{q+1}e^{-(x_0/\eta)^{p+1}} - x^{q+1}e^{-(x/\eta)^{p+1}})\right) + \frac{q+1}{p+1}\eta^{p+1}I_q \\ &= \eta^{p+1}e^{-(x/\eta)^{p+1}}\left(\frac{-1}{p+1}(x_0^{q+1}e^{-((x_0-x)/\eta)^{p+1}} - x^{q+1})\right) + \frac{q+1}{p+1}\eta^{p+1}I_q \\ &= \pounds\eta^{p+1}e^{-(x/\eta)^{p+1}} + \pounds\eta^{p+1}I_q \end{aligned}$$

Et une récurence portant sur l'entier n qui apparait lors de l'écriture $q = \tilde{q}+n(p+1)$, avec $\tilde{q} \in \{0, 1, ..., p\}$, permet de conclure. $\square$

Références

[1] E. Benoît, A. Fruchard, R. Schäfke, and G. Wallet. Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes-rapides à point tournant. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 7(4) :627–658, 1998.

[2] P. Cartier. Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non-standard. In *Bourbaki Seminar, Vol. 1981/1982*, volume 92 of *Astérisque*, pages 21–44. Soc. Math. France, Paris, 1982.

[3] P. de Maesschalck. *Geometry and Gevrey asymptotics of two dimensional turning points.* PhD thesis, Limburgs universitair centrum, 2003.

[4] F. Diener and M. Diener. Chasse au canard. I. Les canards. *Collect. Math.*, 32(1) :37–74, 1981.

[5] F. Diener and G. Reeb. *Analyse non standard*, volume 40 of *Collection Enseignement des Sciences.* Hermann, Paris, 1989.

[6] F. Dumortier and R. Roussarie. Canard cycles and center manifolds. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 121(577), 1996. With an appendix by Cheng Zhi Li.

[7] E. Nelson. Internal set theory : a new approach to nonstandard analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83(6) :1165–1198, 1977.

[8] D. Panazzolo. On the existence of canard solutions. *Publ. Mat.*, 44(2) :503–592, 2000.

[9] G. Wallet. Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2. *Bull. Soc. Math. France*, 122(2) :185–208, 1994.

[10] A. K. Zvonkin and M. A. Shubin. Nonstandard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations. *Uspekhi Mat. Nauk*, 39(2(236)) :77–127, 1984.

99-1 Monique Jeanblanc et Nicolas Privault. A complete market model with Poisson and Brownian components. A paraître dans *Proceedings of the Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications*, Ascona, 1999.

99-2 Laurence Cherfils et Alain Miranville. Generalized Cahn-Hilliard equations with a logarithmic free energy. A paraître dans *Revista de la Real Academia de Ciencias.*

99-3 Jean-Jacques Prat et Nicolas Privault. Explicit stochastic analysis of Brownian motion and point measures on Riemannian manifolds. *Journal of Functional Analysis* **167** (1999) 201-242.

99-4 Changgui Zhang. Sur la fonction q-Gamma de Jackson. A paraître dans *Aequationes Math.*

99-5 Nicolas Privault. A characterization of grand canonical Gibbs measures by duality. A paraître dans *Potential Analysis.*

99-6 Guy Wallet. La variété des équations surstables. A paraître dans *Bulletin de la Société Mathématique de France.*

99-7 Nicolas Privault et Jiang-Lun Wu. Poisson stochastic integration in Hilbert spaces. *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, **6** (1999) 41-61.

99-8 Augustin Fruchard et Reinhard Schäfke. Sursabilité et résonance.

99-9 Nicolas Privault. Connections and curvature in the Riemannian geometry of configuration spaces. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **330** (2000) 899-904.

99-10 Fabienne Marotte et Changgui Zhang. Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique. A paraître dans *Annales de l'Institut Fourier*, 2000.

99-11 Knut Aase, Bernt Øksendal, Nicolas Privault et Jan Ubøe. White noise generalizations of the Clark-Haussmann-Ocone theorem with application to mathematical finance. *Finance and Stochastics*, **4** (2000) 465-496.

00-01 Eric Benoît. Canards en un point pseudo-singulier nœud. A paraître dans *Bulletin de la Société Mathématique de France.*

00-02 Nicolas Privault. Hypothesis testing and Skorokhod stochastic integration. *Journal of Applied Probability*, **37** (2000) 560-574.

00-03 Changgui Zhang. La fonction théta de Jacobi et la sommabilité des séries entières q-Gevrey, I. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **331** (2000) 31-34.

00-04 Guy Wallet. Déformation topologique par changement d'échelle.

00-05 Nicolas Privault. Quantum stochastic calculus for the uniform measure and Boolean convolution. A paraître dans *Séminaire de Probabilités* **XXXV**.

00-06 Changgui Zhang. Sur les fonctions q-Bessel de Jackson.

00-07 Laure Coutin, David Nualart et Ciprian A. Tudor. Tanaka formula for the fractional Brownian motion. A paraître dans *Stochastic Processes and their Applications.*

00-08 Nicolas Privault. On logarithmic Sobolev inequalities for normal martingales. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* **9** (2000) 509-518.

01-01 Emanuelle Augeraud-Veron et Laurent Augier. Stabilizing endogenous fluctuations by fiscal policies ; Global analysis on piecewise continuous dynamical systems. A paraître dans *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*

01-02 Delphine Boucher. About the polynomial solutions of homogeneous linear differential equations depending on parameters. A paraître dans *Proceedings of the 1999 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation : ISSAC 99, Sam Dooley Ed., ACM, New York 1999.*

01-03 Nicolas Privault. Quasi-invariance for Lévy processes under anticipating shifts.

01-04 Nicolas Privault. Distribution-valued iterated gradient and chaotic decompositions of Poisson jump times functionals.

01-05 Christian Houdré et Nicolas Privault. Deviation inequalities : an approach via covariance representations.

01-06 Abdallah El Hamidi. Remarques sur les sentinelles pour les systèmes distribués

02-01 Eric Benoît, Abdallah El Hamidi et Augustin Fruchard. On combined asymptotic expansions in singular perturbation.

02-02 Rachid Bebbouchi et Eric Benoît. Equations différentielles et familles bien nées de courbes planes.

02-03 Abdallah El Hamidi et Gennady G. Laptev. Nonexistence of solutions to systems of higher-order semilinear inequalities in cone-like domains.

02-04 Hassan Lakhel, Youssef Ouknine, et Ciprian A. Tudor. Besov regularity for the indefinite Skorohod integral with respect to the fractional Brownian motion : the singular case.

02-05 Nicolas Privault et Jean-Claude Zambrini. Markovian bridges and reversible diffusions with jumps.

02-06 Abdallah El Hamidi et Gennady G. Laptev. Existence and Nonexistence Results for Reaction-Diffusion Equations in Product of Cones.

02-07 Guy Wallet. Nonstandard generic points.

02-08 Gilles Bailly-Maitre. On the monodromy representation of polynomials.

02-09 Abdallah El Hamidi. Necessary conditions for local and global solvability of nondiagonal degenerate systems.

02-10 Abdallah El Hamidi et Amira Obeid. Systems of Semilinear higher order evolution inequalities on the Heisenberg group.

03-01 Abdallah El Hamidi et Gennady G. Laptev. Non existence de solutions d'inéquations semilinéaires dans des domaines coniques.

03-02 Eric Benoît et Marie-Joëlle Rochet. A continuous model of biomass size spectra governed by predation and the effects of fishing on them.

03-03 Catherine Stenger : On a conjecture of Wolfgang Wasow concerning the nature of turning points.

03-04 Christian Houdré et Nicolas Privault. Surface measures and related functional inequalities on configuration spaces.

03-05 Abdallah El Hamidi et Mokhtar Kirane. Nonexistence results of solutions to systems of semilinear differential inequalities on the Heisenberg group.

03-06 Uwe Franz, Nicolas Privault et René Schott. Non-Gaussian Malliavin calculus on real Lie algebras.

04-01 Abdallah El Hamidi. Multiple solutions to a nonlinear elliptic equation involving Paneitz type operators.

04-02 Mohamed Amara, Amira Obeid et Guy Vallet. Relaxed formulation and existence result of the degenerated elliptic small disturbance model.

04-03 Hippolyte d'Albis et Emmanuelle Augeraud-Veron. Competitive Growth in a Life-cycle Model : Existence and Dynamics

04-04 Sadjia Aït-Mokhtar : Third order differential equations with fixed critical points.

04-05 Mokhtar Kirane et Nasser-eddine Tatar. Asymptotic Behavior for a Reaction Diffusion System with Unbounded Coefficients.

04-06 Mokhtar Kirane, Eric Nabana et Stanislav I. Pohozaev. Nonexistence of Global Solutions to an Elliptic Equation with a Dynamical Boundary Condition.

04-07 Khaled M. Furati, Nasser-eddine Tatar and Mokhtar Kirane. Existence and asymptotic behavior for a convection Problem.

04-08 José Alfredo López-Mimbela et Nicolas Privault. Blow-up and stability of semilinear PDE's with gamma generator.

04-09 Abdallah El Hamidi. Multiple solutions with changing sign energy to a nonlinear elliptic equation.

04-10 Sadjia Aït-Mokhtar : A singularly perturbed Riccati equation.

04-11 Mohamed Amara, Amira Obeid et Guy Vallet. Weighted Sobolev spaces for a degenerated nonlinear elliptic equation.

04-12 Abdallah El Hamidi. Existence results to elliptic systems with nonstandard growth conditions.

04-13 Eric Edo et Jean-Philippe Furter : Some families of polynomial automorphisms.

04-14 Laurence Cherfils et Yavdat Il'yasov. On the stationary solutions of generalized reaction diffusion equations with p & q- Laplacian.

04-15 Jean-Christophe Breton et Youri Davydov. Local limit theorem for supremum of an empirical processes for i.i.d. random variables.

04-16 Jean-Christophe Breton, Christian Houdré et Nicolas Privault. Dimension free and infinite variance tail estimates on Poisson space.

04-17 Abdallah El Hamidi et Gennady G. Laptev. Existence and nonexistence results for higher-order semilinear evolution inequalities with critical potential.

05-01 Mokhtar Kirane et Nasser-eddine Tatar. Nonexistence of Solutions to a Hyperbolic Equation with a Time Fractional Damping.

05-02 Mokhtar Kirane et Yamina Laskri. Nonexistence of Global Solutions to a Hyperbolic Equation with a Time Fractional Damping.

05-03 Mokhtar Kirane, Yamina Laskri et Nasser-eddine Tatar. Critical Exponents of Fujita Type for Certain Evolution Equations and Systems with Spatio-Temporal Fractional Derivatives.

05-04 Abdallah El Hamidi et Jean-Michel Rakotoson. Compactness and quasilinear problems with critical exponents

05-05 Claudianor O. Alves et Abdallah El Hamidi. Nehari manifold and existence of positive solutions to a class of quasilinear problems.

05-06 Khalid Adriouch et Abdallah El Hamidi. The Nehari manifold for systems of nonlinear elliptic equations.

05-07 Eric Benoît. Equation fonctionnelle : Transport et convolution.

05-08 Jean-Philippe Furter et Stefan Maubach. Locally Finite Polynomial Endomorphisms and an extension of the Cayley-Hamilton Theorem.

05-09 Thomas Forget. Solutions canards en des points tournants dégénérés.