



## Prépublications du Département de Mathématiques

Université de La Rochelle  
Avenue Marillac  
17042 La Rochelle Cedex 1  
<http://www.univ-lr.fr/Labo/MATH>

# Surstabilité et résonance

Augustin Fruchard et Reinhard Schäfke

Octobre 1999

**Classification:** 34E.

**Mots clés:** résonance, canard, surstabilité, perturbation singulière.

# Surstabilité et résonance

Augustin Fruchard et Reinhard Schäfke

October 30, 1999

**Résumé :** On considère l'équation différentielle linéaire réelle  $\varepsilon y'' + \varphi(x, \varepsilon)y' + \psi(x, \varepsilon)y = 0$  où  $\varepsilon > 0$  est un petit paramètre et où  $\varphi(x, 0)$  est du signe de  $x$ . Les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont supposées analytiques dans un voisinage de  $[a, b] \times \{0\}$  ; on suppose en outre que la fonction  $\psi_0 : x \mapsto \psi(x, 0)$  a un zéro en  $x = 0$ , d'ordre au moins égal à celui de  $\varphi_0 : x \mapsto \varphi(x, 0)$ . Nous appelons solution résonnante une solution  $y_\varepsilon$  qui tend vers une solution non triviale de l'équation réduite (obtenue pour  $\varepsilon = 0$ ) et dont toutes les dérivées restent bornées lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. On démontre dans ce contexte qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation possède une solution résonnante, est qu'il existe une solution formelle en puissances de  $\varepsilon$ . La preuve repose sur l'étude dans le champ complexe des solutions surstables de l'équation de Riccati associée. Le résultat principal est un "principe de prolongement" de solutions surstables pour les équations analytiques en  $\varepsilon$ .

**Mots-clés :** résonance, canard, surstabilité, perturbation singulière.

**Classification A.M.S. :** 34E.

## 1 Introduction.

Initialement, le problème de la résonance posé par Ackerberg et O'Malley [1] portait sur le problème aux limites suivant

$$\varepsilon y'' + \varphi(x, \varepsilon)y' + \psi(x, \varepsilon)y = 0 \quad (1)$$

$$y(a) = 1, \quad y(b) = B > 0 \quad (2)$$

où  $y$  est une fonction réelle de la variable réelle  $x$  variant dans un intervalle réel  $[a, b]$ ,  $\varphi$  et  $\psi$  sont suffisamment régulières, et  $\varepsilon > 0$  est un petit paramètre. Ce problème a une unique solution  $y(x, \varepsilon)$  et on s'intéresse à son comportement asymptotique lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro.

Si la fonction  $\varphi_0 : x \mapsto \varphi(x, 0)$  garde un signe constant sur  $[a, b]$ , par exemple positif, alors la solution  $y$  présente une couche limite en  $x = a$ , puis tend vers la solution  $y_0$  de l'équation réduite

$$\varphi(x, 0)y' + \psi(x, 0)y = 0 \quad (3)$$

satisfaisant la condition  $y_0(b) = B$ . Si le signe de  $\varphi_0$  est négatif, la couche limite est située en  $b$ .

Si la fonction  $\varphi_0$  s'annule en un point  $x_0 \in ]a, b[$  — pour simplifier l'écriture, on suppose que  $x_0 = 0$  — et si  $x\varphi(x, 0) \leq 0$  alors, *en général*,  $y$  présente deux couches limites, en  $x = a$  et en  $x = b$ , et tend vers 0 à l'intérieur de l'intervalle. Il peut arriver cependant que  $y$  présente une seule couche limite à l'extrémité “la plus éloignée de 0” dans un sens qui sera précisé après, et tende vers une solution non triviale  $y_0$  de l'équation réduite (3) sur le reste de l'intervalle (au sens de la convergence uniforme sur tout compact de l'intervalle semi-ouvert restant). Nous dirons alors qu'il y a *résonance au sens de Ackerberg-O'Malley*.

N. Kopell [12] a établi que ce problème est équivalent à celui de trouver une solution de (1) tendant vers une solution non triviale de l'équation réduite, mais ne satisfaisant pas forcément les conditions aux limites.

Dans le cas où la fonction  $\varphi_0$  satisfait  $\varphi_0'(0) < 0$  — c'est-à-dire si 0 est un point tournant simple — W.D. Lakin [13] et L.P. Cook – W. Eckhaus [10] ont démontré indépendamment qu'une condition nécessaire pour qu'il y ait résonance est qu'il existe une solution formelle de (1)  $\hat{y}(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} y_n(x) \varepsilon^n$  avec des coefficients  $y_n$  analytiques au voisinage de 0. Cette condition avait été proposée par Matkowsky [15] ; c'est pourquoi nous l'appellerons par la suite *condition de Matkowsky*. Mentionnons au passage le travail de F.W.J. Olver [16].

Dans [17], Y. Sibuya se ramène au cas où  $\varphi_0(x) = -2x$  et montre que la condition de Matkowsky est suffisante pour avoir résonance lorsque la fonction  $\psi_0 : x \mapsto \psi(x, 0)$  est analytique dans un disque centré en 0 contenant le segment  $[a, b]$ . Cette condition a été améliorée par son élève C.H. Lin : la condition de Matkowsky est suffisante dans le cas où les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont analytiques dans un voisinage de  $[a, b] \times \{0\}$  de  $\mathbb{C}^2$ .

On s'intéresse ici au cas d'un point tournant d'ordre quelconque. Dans ce cas la condition de Matkowsky semble ne plus être nécessaire : pour conforter cette impression, nous présentons au paragraphe 2.2 un exemple simple d'équation d'ordre 1 (affine) ne possédant pas de solution formelle mais possédant des canards. Ceci nous a conduits à renforcer la condition de résonance : on demande que toutes les dérivées de  $y$  soient bornées, uniformément en  $\varepsilon$ . En l'état actuel de nos recherches, nous avons besoin de supposer que la fonction  $\psi_0$  a aussi un zéro au point 0, d'ordre au moins égal à celui de  $\varphi_0$ . On démontre dans ce contexte que la condition de Matkowsky est nécessaire et suffisante pour la résonance.

Notre méthode repose sur deux idées. La première est l'étude de l'équation de Riccati associée. Le changement d'inconnue  $\frac{y'}{y} = -\frac{\psi_0}{\varphi_0} + u$  aboutit à une équation de la forme

$$\varepsilon u' = f(x)u + \varepsilon P(x, u, \varepsilon) \quad (4)$$

avec  $f = -\varphi_0$  et  $P$  régulière (cf. formule (24)). Cette équation (4) est du type *lent-rapide*, sur laquelle la théorie des canards [4] s'applique. Le lien précis entre les canards de l'équation (4) et les solutions résonnantes de l'équation (1) est établi dans la partie 4. Ce lien avait déjà été établi par J.L. Callot dans sa thèse [7]. Cependant, pour faciliter la tâche au lecteur ‘classique’, nous présentons ici des énoncés et certaines preuves dans le langage classique et dans les termes de notre article.

La deuxième idée est le passage en complexe, non seulement pour la variable  $x$  mais aussi pour le paramètre  $\varepsilon$ . En effet, de nombreux outils ont été développés dernièrement [5, 6, 9] sur les équations différentielles lentes-rapides complexes. Ces outils sont présentés dans la partie 2.

Bien que le résultat soit déjà connu pour le cas d'un point tournant simple, nous estimons que notre méthode est plus simple que celle employée par C.H. Lin. Le cas d'un point tournant

simple a aussi été exposé dans un récent article [5, 6], où on introduit un paramètre de contrôle. Cette dernière méthode est à rapprocher de l'article de N. Kopell [12].

La preuve de l'équivalence entre la condition de Matkowsky et la résonance est établie dans la partie 4. Auparavant nous démontrons un résultat analogue concernant les équations différentielles non linéaires du premier ordre.

L'article termine sur une construction (implicite) d'une équation analytique de la forme (1) qui présente la résonance et dont toutes les solutions formelles non nulles sont divergentes. En effet on pourrait croire que la résonance n'apparaisse que lorsque les solutions formelles sont convergentes à constante multiplicative près (si  $\hat{y}$  est une solution formelle et si  $\alpha(\varepsilon)$  est une série formelle indépendante de  $x$ , alors la série  $\alpha(\varepsilon)\hat{y}(x, \varepsilon)$  est aussi une solution formelle). Notre construction a aussi le mérite de montrer l'optimalité du résultat général sur le caractère Gevrey-1 des solutions formelles. Nous espérons ainsi convaincre le lecteur de la réalité du problème de la résonance.

Une partie de notre travail (la preuve du théorème 10 dans la section 3.5) a d'abord été élaborée dans le cadre de l'analyse non standard puis traduite en termes classiques. Concernant cette partie, les hypothèses concernant la régularité de l'équation (1) en  $\varepsilon$  peuvent être très largement affaiblies. En revanche, nous insistons sur le fait que l'analyticité par rapport à  $\varepsilon$  est une hypothèse clé dans la preuve du théorème 6 (section 3.3).

## 2 La surstabilité pour une équation non linéaire du premier ordre.

Considérons une équation différentielle analytique lente-rapide

$$\varepsilon u' = \phi(x, u, \varepsilon) \tag{5}$$

où  $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  est un petit paramètre. Dans tout l'article, les dérivées seront systématiquement par rapport à la variable  $x$ .

On s'intéresse au comportement asymptotique lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  d'une famille de solutions de (5) dépendant de  $\varepsilon$ . Cependant pour alléger le discours et les notations, nous omettrons la dépendance en  $\varepsilon$  et nous parlerons d'une solution, et non d'une famille. Dans ce contexte, une *solution bornée sur un intervalle*  $I \subset [a, b]$  est une fonction  $u = u(x, \varepsilon)$  définie et bornée sur un pavé de la forme  $I \times ]0, \varepsilon_0]$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ , qui est solution de (5). Notons toutefois qu'aucune condition de régularité par rapport à  $\varepsilon$  n'est requise.

Supposons que l'intervalle  $]a, b[$  contienne 0, et que l'équation (5) soit munie d'une courbe lente attractive pour  $x < 0$  et répulsive pour  $x > 0$ . La situation est donc propice à la présence de canards. Nous allons démontrer que ces canards existent et ont des dérivées bornées en 0 si et seulement si l'équation possède une solution formelle avec des coefficients sans singularité au point  $x = 0$ . Pour cela nous utilisons les solutions surstables, obtenues en considérant l'équation (5) dans le champ complexe. Précisément nous démontrons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que (5) possède une solution surstable est qu'elle possède une solution formelle à coefficients analytiques en  $x = 0$ , et nous établissons un lien entre les solutions surstables complexes et les canards réels.

Nous nous sommes immédiatement placés dans une situation où la courbe lente a pour équation  $u = 0$ . Ceci peut toujours se faire moyennant une simple translation sur  $u$ . En notant

$f$  la dérivée partielle de  $\Phi$  par rapport à  $u$  le long de cette courbe lente, on obtient ainsi une équation de la forme (4).

## 2.1 Enoncé du résultat principal.

On considère l'équation (4), que nous réécrivons avec les hypothèses précises par commodité pour le lecteur :

$$\varepsilon u' = f(x)u + \varepsilon P(x, u, \varepsilon), \quad (6)$$

où  $f$  et  $P$  satisfont les propriétés suivantes.

- *La fonction  $f$  est analytique dans un voisinage complexe d'un intervalle réel  $[a, b]$ ,  $a < 0 < b$ , et à valeurs réelles sur l'axe réel.*
- *On a  $xf(x) > 0$  pour tout  $x \in [a, b] \setminus \{0\}$  ; de plus il existe  $\lambda > 0$  et  $p \in 2\mathbb{N} + 1$  tels que  $f(x) = \lambda x^p(1 + O(x))$  au voisinage de 0.*
- *La fonction  $P$  est analytique dans un voisinage de  $[a, b] \times \{0\} \times \{0\}$  dans  $\mathbb{C}^3$ .*

**Définition 1.** — On appelle *canard local* une solution de (6) qui est définie et bornée sur un intervalle  $] -\delta, \delta[$ ,  $\delta > 0$  au sens du début de la section, c'est-à-dire bornée sur un pavé de la forme  $] -\delta, \delta[\times] 0, \varepsilon_0[$ ,  $\delta, \varepsilon_0 > 0$ .

On appelle *canard global* une solution de (6) qui est définie et bornée sur tout l'intervalle  $[a, b]$ .

On dit que  $u$  est un *canard  $S^\infty$  local*, resp. *global*, si pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la fonction  $u^{(n)}$  est bornée sur un intervalle  $] -\delta, \delta[$ ,  $\delta > 0$ , resp. sur  $[a, b]$  (c'est-à-dire  $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$  bornée sur  $] -\delta, \delta[\times] 0, \varepsilon_0[$ , resp.  $[a, b]\times] 0, \varepsilon_0[$ ).

**Définition 2.** — Etant donné un domaine simplement connexe  $D \subset \mathbb{C}$  contenant 0 et un secteur  $S = S(\alpha, \beta) = \{\varepsilon \in \mathbb{C}^* \mid \alpha < \arg(\varepsilon) < \beta\}$ , une solution  $u = u(x, \varepsilon)$  de (6) est dite *surstable dans  $D \times S$*  si, pour tout domaine  $D'$  relativement compact dans  $D$ , il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon$  dans  $S$  avec  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ , la solution  $u$  est définie et bornée sur  $D'$  (c'est-à-dire uniformément bornée par rapport à  $\varepsilon$ ).

On dit que  $u$  est une solution *surstable locale* dans la direction  $d$  s'il existe un voisinage complexe  $D$  de 0 et un secteur  $S$  contenant  $]0, \infty e^{id}[$  tels que  $u$  est surstable dans  $D \times S$ .

On dit que  $u$  est une solution *surstable globale* dans la direction  $d$  s'il existe un voisinage complexe  $D$  de  $[a, b]$  et un secteur  $S$  contenant  $]0, \infty e^{id}[$  tels que  $u$  est surstable dans  $D \times S$ .

**Remarques :** 1 – Le secteur  $S$  de la définition est un secteur infini, mais on demande à  $\varepsilon$  d'être dans un *germe sectoriel* en 0.

2 – Il est à noter que la solution  $u$  n'est pas nécessairement définie sur  $D$  en entier. Dans le contexte de l'analyse non standard, une solution surstable est définie et limitée sur le  $S$ -intérieur de  $D$  pour  $\varepsilon$  infiniment petit dans le secteur  $S$ . Compte tenu de la forme particulière de l'équation (6), il est naturel de ne considérer que des canards et des solutions surstables qui sont proches de 0, ce que nous faisons dans toute la suite. C'est déjà nécessairement le cas en dehors du point tournant  $x = 0$  lorsque le terme  $\varepsilon P$  de (6) est petit.

3 – Comme pour les canards, aucune régularité par rapport à  $\varepsilon$  n'est requise. En particulier, si pour toute direction  $d$  de  $\mathbb{S}^1$  il existe une solution surstable dans  $D \times S$ , où  $S$  est un secteur bissecté par  $d$ , alors un simple recollement de ces solutions fournit une solution surstable dans

$D \times \mathbb{C}^*$ . Par contre, si l'on désire une dépendance analytique en  $\varepsilon$ , celle-ci ne pourra être réalisée en général que pour des secteurs d'ouverture  $\beta - \alpha$  inférieure à  $\pi$ .

Le résultat principal de l'article est le suivant.

**Théorème 3.** — *Avec les hypothèses et notations précédentes, les cinq assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *Il existe une solution formelle  $\hat{u}(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} u_n(x) \varepsilon^n$  de (6) dont les coefficients  $u_n$  sont analytiques au voisinage de 0.*
- 2) *Il existe une solution surstable locale de (6) pour toute direction  $d$ .*
- 3) *Il existe une solution surstable globale de (6) pour la direction 0.*
- 4) *Il existe un canard global  $S^\infty$  de (6).*
- 5) *Il existe un canard local  $S^\infty$  de (6).*

## 2.2 Exemples.

Avant de démontrer ce résultat, nous présentons ici deux “contre-exemples” élémentaires. Le premier exemple est une équation (non analytique par rapport à  $\varepsilon$ ) ayant une solution formelle mais pas de canard. Le deuxième exemple est une équation ayant un canard (non  $S^\infty$ ) mais pas de solution formelle.

EXEMPLE 1. — Considérons l'équation

$$\varepsilon u' = xu + \alpha \tag{7}$$

où  $\alpha$  peut dépendre de  $\varepsilon$  mais est constante par rapport à  $x$ . La solution générale s'écrit

$$u(x) = u(x_0) \exp\left(\frac{x^2 - x_0^2}{2\varepsilon}\right) + \int_{x_0}^x \frac{\alpha}{\varepsilon} \exp\left(\frac{x^2 - \xi^2}{2\varepsilon}\right) d\xi. \tag{8}$$

Si  $\alpha = \alpha(\varepsilon)$  admet la série nulle pour développement asymptotique lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, alors l'équation (6) a pour solution formelle la série nulle. En revanche, si  $\alpha$  est telle que la fonction  $\varepsilon \log |\alpha(\varepsilon)|$  a une limite  $l$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , alors l'équation présente une *butée* [4] aux points  $\pm\sqrt{2l}$ . Par exemple, si  $\alpha = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$  alors il n'y a pas de canards, et si  $\alpha = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$ , alors il y a des canards locaux mais pas globaux dès que  $a < -\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2} < b$ . Le théorème 3 précédent affirme qu'il n'y a pas de butée pour les équations différentielles à coefficients analytiques par rapport à  $\varepsilon$ .

EXEMPLE 2. — Il s'agit de l'équation

$$\varepsilon u' = 2x^3 u - 2\varepsilon x. \tag{9}$$

Cette équation ne possède pas de solution formelle à coefficients analytiques en  $x = 0$ , puisque le premier terme de la solution formelle est donné par  $u_1(x) = \frac{1}{x^2}$ . Par contre, nous allons voir qu'elle possède un canard. Pour cela, on effectue le changement de variable  $t = x^2$  et on note  $v(t) = u(x)$ . Cela nous conduit à l'équation

$$\varepsilon \frac{dv}{dt} = tv - \varepsilon. \tag{10}$$

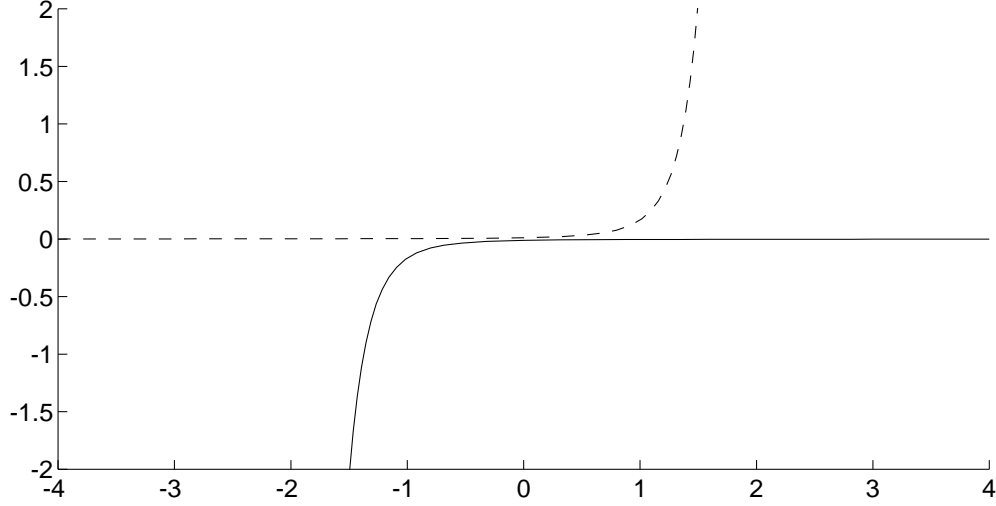


Figure 1: les deux solutions s’annulant en  $+\infty$  et  $-\infty$  pour  $\varepsilon = 1/4$  et  $\alpha = \exp(-1/\varepsilon)$ .

Considérons la solution  $\tilde{v}$  de (10) de condition “initiale”  $\tilde{v}(+\infty) = 0$ . Cette solution est définie sur  $\mathbb{R}$  et donnée par la même formule de la variation de la constante que (8), donc :

$$\tilde{v}(t) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2\varepsilon} - \frac{ts}{\varepsilon}\right) ds .$$

(On peut aussi exprimer  $\tilde{v}$  au moyen de la fonction erreur complémentaire normalisée  $\operatorname{erfcx}(\xi) := e^{\xi^2} \int_{\xi}^{+\infty} e^{-u^2} du$  ; on trouve  $\tilde{v}(t) = \sqrt{2\varepsilon} \operatorname{erfcx}\left(\frac{t}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)$ .) On a, pour tout  $t \geq 0$ ,  $|\tilde{v}(t)| \leq \tilde{v}(0) = \sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2}}$ . On en déduit que la solution  $\tilde{u}$  de (9) de condition initiale  $\tilde{u}(+\infty) = 0$ , donnée par  $\tilde{u}(x) = \tilde{v}(x^2)$ , est limitée — et même tend vers 0 avec  $\varepsilon$  — sur tout  $\mathbb{R}$ .

Notons cependant que cette solution  $\tilde{u}$  a une dérivée quatrième non limitée en 0, donc ne satisfait pas l’hypothèse du théorème 3 : en dérivant (9) on obtient

$$\varepsilon u^{(4)} = 2x^3 u^{(3)} + 18x^2 u'' + 36xu' + 12u ,$$

d’où  $u^{(4)}(0) = 6\sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}}$ .

Dans le plan complexe, le relief [5, 8], qui est la surface de  $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \ni (x, z)$  d’équation  $z = R(x) := \operatorname{Re}\left(\int_0^x 2\xi^3 d\xi\right)$ , présente quatre montagnes contenant chacune un demi-axe — réel ou imaginaire pur — et quatre vallées contenant chacune une demi-diagonale. La solution  $\tilde{u}$  a pour prolongement complexe une solution proche de la courbe lente sur les deux montagnes contenant chacune un demi-axe réel, mais pas sur les deux autres montagnes, alors qu’une solution surstable serait proche de la courbe lente sur tout un voisinage de 0.

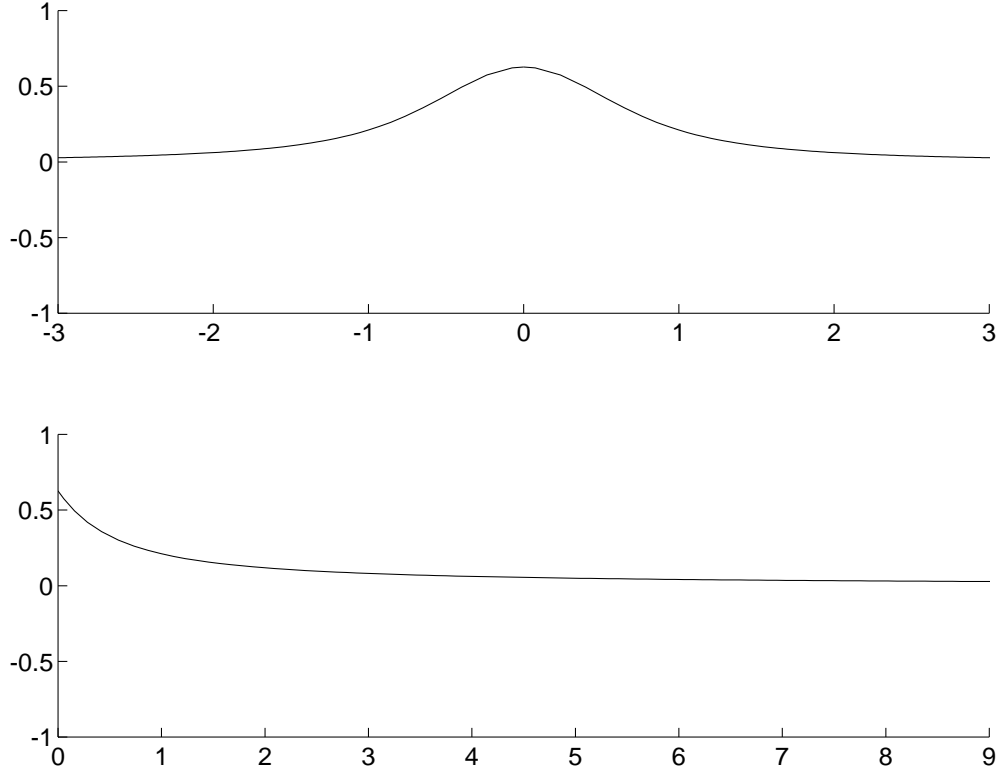


Figure 2: les solutions  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  pour  $\varepsilon = 1/4$ .

### 3 Preuve du théorème 3.

Nous l'avons décomposée en boucle dans l'ordre de l'énoncé. Auparavant, nous décrivons la solution formelle de (6). Cette description ne nous sera utile que pour la section 3.5, mais nous avons jugé préférable de la présenter dès à présent.

#### 3.1 Etude de la solution formelle de (6).

La recherche de solutions formelles de (6),  $\hat{u}(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} u_n(x) \varepsilon^n$ , à coefficients analytiques en  $x = 0$ , aboutit à l'équation suivante :

$$\sum_{n \geq 0} u'_n(x) \varepsilon^{n+1} = f(x) \sum_{n \geq 0} u_n(x) \varepsilon^n + \varepsilon \sum_{k, l \geq 0} p_{k, l}(x) \left( \sum_{\nu \geq 0} u_\nu(x) \varepsilon^\nu \right)^k \varepsilon^l, \quad (11)$$

où les  $p_{k, l}$  sont définis par  $P(x, u, \varepsilon) = \sum_{k, l \geq 0} p_{k, l}(x) u^k \varepsilon^l$ .

En notant  $\phi_n(x) = \phi_n(u_0, \dots, u_n)(x)$  le terme en  $\varepsilon^n$  de l'expression

$$\sum_{k, l \geq 0} p_{k, l}(x) \left( \sum_{\nu \geq 0} u_\nu \varepsilon^\nu \right)^k \varepsilon^l,$$

on obtient par identification formelle les équations

$$u_0 \equiv 0$$



et

$$\forall n \geq 1, \quad u'_{n-1} = f u_n + \phi_{n-1}. \quad (12)$$

Par récurrence sur  $n$ , si  $u_0, \dots, u_{n-1}$  ont pu être calculés et sont analytiques au voisinage de 0, et si

$$u'_{n-1}(x) - \phi_{n-1}(x) = \mathcal{O}(x^p) \quad (13)$$

au voisinage de  $x = 0$ , alors (12) donne  $u_n := \frac{1}{f}(u'_{n-1} - \phi_{n-1})$ , qui est bien analytique au voisinage de 0. Réciproquement, la condition (13) est bien entendu une condition nécessaire pour que  $u_n$  soit analytique. Nous avons donc démontré le résultat suivant.

**Proposition 4.** — *Il existe une solution formelle de (6) à coefficients  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  analytiques en 0 si et seulement si pour tout entier  $n$  le jet d'ordre  $p$  en 0 de  $u'_n - \phi_n(u_0, \dots, u_n)$  est nul. Dans ce cas les coefficients  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont donnés récursivement par  $u_0 = 0$  et*

$$u_n = \frac{1}{f}(u'_{n-1} - \phi_{n-1}).$$

Notons au passage — ceci nous servira par la suite — que pour tout  $n \geq 1$  il existe une fonction  $R_n$  (dépendant a priori de  $\varepsilon$ ) analytique et bornée au sens du début de la partie 2, pour  $x$  dans un voisinage standard de 0, telle que

$$P\left(x, \sum_{\nu=0}^{n-1} u_\nu(x) \varepsilon^\nu, \varepsilon\right) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \phi_\nu(x) \varepsilon^\nu + \varepsilon^n R_n(x). \quad (14)$$

### 3.2 De la solution formelle aux solutions surstables.

Nous commençons à présent la démonstration du théorème 3. En ce qui concerne l'implication 1)  $\Rightarrow$  2), nous utilisons simplement les résultats généraux obtenus dans [9], précisément la proposition 8.3, qui s'exprime de la façon suivante dans les termes du présent article.

**Proposition 5.** — *Si l'équation (6) possède une solution formelle à coefficients analytiques sur  $[a, b]$  alors elle possède une solution surstable locale pour toute direction  $d$ .*

Une preuve directe consisterait à montrer à l'aide d'une équation majorante et de normes adaptées, appelées normes de Nagumo modifiées dans [9], que la série formelle solution satisfait des estimations de type Gevrey. On construit alors par une transformée de Borel formelle de la série puis une transformée de Laplace tronquée une *quasi-solution*, c'est-à-dire une fonction  $u$  qui satisfait l'équation à exponentiellement petit près. Le lemme de Gronwall permet alors de construire une solution surstable.

Une autre preuve consisterait à plonger l'équation (6) dans la famille à  $p$  paramètres

$$\varepsilon u' = f(x)u + \varepsilon P(x, u, \varepsilon) + \sum_{k=1}^p \alpha_k x^{k-1} \quad (15)$$

et à utiliser le résultat 6 de [6]. On note  $F$  la primitive de  $f$  s'annulant en 0, et  $C_r$  la composante connexe contenant 0 de l'ensemble  $\{x \in \mathbb{C} ; |F(x)| < r\}$ . Pour  $r$  suffisamment petit, les fonctions  $f$  et  $P$  sont analytiques dans un voisinage de  $\overline{C_r}$ , resp.  $\overline{C_r} \times \{0\} \times \{0\}$ . La sommation "au plus petit terme"  $\bar{a} = \sum_{\nu=0}^{\lceil r/\varepsilon \rceil} a_\nu \varepsilon^\nu$  de l'unique solution formelle  $\hat{a} = \sum_{n \geq 0} a_n \varepsilon^n$  fournit une valeur du paramètre  $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  pour laquelle il existe une solution surstable pour toute

direction  $d \in \mathbb{S}^1$ . Puisque l'équation (6) sans paramètre possède déjà une solution formelle, c'est que la solution formelle  $\hat{a}$  est identiquement nulle, donc  $\bar{a} = 0$ .

En somme, le passage d'une solution formelle à une solution surstable locale nécessite l'utilisation d'outils puissants, qui sortent du cadre du présent article.

Insistons sur le fait que la solution surstable construite ne peut pas en général dépendre analytiquement de  $\varepsilon$  dans tout un voisinage pointé de 0. Cependant, la proposition 8.3 de [9] fournit des solutions surstables analytiques par rapport à  $\varepsilon$  dans des germes sectoriels.

### 3.3 Prolongement d'une solution surstable.

Nous démontrons ici le résultat suivant.

**Théorème 6.** — *Si l'équation (6) a une solution surstable pour  $x$  dans un voisinage complexe de 0 pour toute valeur de  $\arg(\varepsilon)$ , alors elle possède une solution surstable pour  $x$  dans un voisinage de  $[a, b]$  et pour  $\varepsilon$  réel positif.*

**Preuve.** Notons comme précédemment  $F$  la primitive de  $f$  s'annulant en 0. D'après les hypothèses faites sur  $f$ , la fonction  $F$  est réelle positive pour  $x$  réel. Par ailleurs, il existe  $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$  avec  $\tilde{a} < a < b < \tilde{b}$  tels que, d'une part  $F(\tilde{a}) \neq F(\tilde{b})$ , et d'autre part les coefficients  $f$  et  $P$  de (6) sont analytiques pour  $x$  dans un domaine  $D$  contenant  $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ . Il suffit donc de montrer qu'il existe une solution surstable dans un domaine contenant  $]\tilde{a}, \tilde{b}[$ . On peut aussi supposer sans perte de généralité que  $F(\tilde{a}) > F(\tilde{b})$ . Pour simplifier les notations, nous noterons encore  $a$  et  $b$  ces points  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$ .

Les lemmes qui suivent ne revendiquent aucune originalité. On les trouvera en substance dans [8] dans une version non standard, et dans [19] pour le cas linéaire. Nous présentons ici des énoncés adaptés à l'article. Pour les commodités de lecture nous incluons aussi leurs preuves.

Le premier lemme est analogue au théorème 2 de [8]. Ce résultat exprime le fait qu'une solution de (6) de condition initiale proche de la courbe lente se prolonge le long d'un chemin descendant le *relief*  $R(x) := \operatorname{Re}(F(x))$ . Nous avons toutefois apporté les modifications suivantes : (a) nous construisons une solution sur tout un domaine en  $x$  et pas seulement en restriction à un chemin, (b) la solution construite est analytique par rapport à  $\varepsilon$  dans un secteur. Dans un but de simplicité, nous avons choisi de ne présenter le résultat que pour un type particulier de domaine en  $x$ .

**Lemme 7.** — *Soit  $x_1 \in D$  et soit  $\Gamma = \{\gamma_s \mid s \in [0, 1]\}$  une famille  $C^1$  de chemins partant de  $x_1$  et restant dans  $D$ , c'est-à-dire  $\Gamma : [0, 1]^2 \rightarrow D$  de classe  $C^1$  telle que  $\forall s \in [0, 1], \Gamma(s, 0) = x_1$ . Soit  $d_1 < d_2$  deux directions de  $\mathbb{S}^1$ . On suppose que tous les chemins de la famille  $\Gamma$  descendent pour toute direction de  $[d_1, d_2]$  ; autrement dit,*

$$\forall d \in [d_1, d_2], \forall (s, t) \in [0, 1]^2, \frac{d}{dt} R_d(\gamma_s(t)) < 0,$$

où on a posé  $R_d(x) := \operatorname{Re}(F(x)e^{-id})$ . On note  $K = \Gamma([0, 1]^2)$ . Soit enfin  $u_1 = u_1(\varepsilon)$  une condition initiale analytique en  $\varepsilon$  telle que  $u_1 = o(1)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que la solution  $u$  de (6) de condition initiale  $u(x_1) = u_1$  est analytique dans un voisinage de  $S \times K$  avec  $S := \{\varepsilon \in \mathbb{C} \mid 0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, d_1 \leq \arg \varepsilon \leq d_2\}$  et satisfait  $u(\varepsilon, x) = o(1)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans  $S$ , uniformément sur  $K$ .

**Preuve.** Par compacité, il existe  $C, \delta > 0$  tels que pour tout  $(s, t) \in [0, 1]^2$  et  $d \in [d_1, d_2]$ ,  $\|\gamma'_s(t)\| < C$  et  $\frac{d}{dt}R_d(\gamma_s(t)) < -\delta$ .

Quitte à restreindre un peu  $D$ , on peut aussi supposer que, pour  $r, \varepsilon_0 > 0$  assez petits,  $|P(x, u, \varepsilon)|$  est borné par une constante  $M > 0$  pour  $x \in D, |u| < r$  et  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ .

Soit  $\rho \in ]0, r[$ . Nous allons montrer que, pour  $\rho$  suffisamment petit, il existe  $\varepsilon_1 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in S$  avec  $|\varepsilon| < \varepsilon_1$  et tout  $s \in [0, 1]$ , la fonction  $v_\varepsilon : t \mapsto u(\varepsilon, \gamma_s(t))$  est définie sur  $[0, 1]$  et satisfait  $|v_\varepsilon(t)| < \rho$ . Puisque pour  $\varepsilon$  assez petit on a  $|v_\varepsilon(0)| = |u_1(\varepsilon)| < \rho$ , d'après le principe de majoration a priori, il suffit de montrer que l'ensemble  $\{|v_\varepsilon| < \rho\}$  est invariant, c'est-à-dire que, si  $|v_\varepsilon(t)| = \rho$  alors  $\frac{d}{dt}|v_\varepsilon(t)| < 0$  pour  $\varepsilon$  assez petit. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v(t)\bar{v}(t) &= 2\operatorname{Re}(u'(\gamma_s(t)) \gamma'_s(t) \bar{u}(\gamma_s(t))) \\ &= \operatorname{Re}\left(\left(\frac{2}{\varepsilon} f(\gamma_s(t))v(t) + 2P(\gamma_s(t), v(t), \varepsilon)\right) \gamma'_s(t)\bar{v}(t)\right) \\ &= \frac{2}{|\varepsilon|} \frac{d}{dt} R_d(\gamma_s(t)) |v(t)|^2 + p(t, v(t), \varepsilon) \end{aligned}$$

avec  $d := \arg \varepsilon$  et  $p(t, v, \varepsilon) := 2\operatorname{Re}(P(\gamma_s(t), v, \varepsilon) \gamma'_s(t) \bar{v})$ .

Si  $|v(t)| = \rho$  alors  $\frac{d}{dt}|v(t)|^2 \leq -2\delta\rho^2/|\varepsilon| + 2MC\rho$ , donc  $\frac{d}{dt}|v(t)|^2 < 0$  dès que  $|\varepsilon| < \varepsilon_1 := \min(\varepsilon_0, \frac{\delta\rho}{MC})$ . Ceci prouve l'existence de  $u$  le long de tout chemin de  $\Gamma$ . L'analyticité en  $\varepsilon$  résulte du théorème de dépendance analytique par rapport aux conditions initiales.  $\square$

Le second lemme présenté ici correspond essentiellement aux propositions 1 et 2 et au théorème 1 de [8]. Ce résultat concerne l'exponentielle proximité des solutions de (6). Ici encore nous avons eu besoin de le modifier pour la suite, et de lui donner un contenu plus quantitatif que dans [8].

**Lemme 8.** — Soit  $u_0$  une solution de (6) définie dans un domaine  $\Omega$  pour  $\varepsilon$  assez petit avec  $\arg \varepsilon = d$ . Soit  $x_1$  et  $x_2$  deux points de  $\Omega$  et  $\gamma$  un chemin dans  $\Omega$  joignant  $x_1$  à  $x_2$ . Soit  $u$  une autre solution de (6) définie dans un voisinage de  $x_1$ , et enfin soit  $\alpha \geq 0$  tel que

$$u(x_1) - u_0(x_1) = o(e^{-\alpha/|\varepsilon|}) .$$

On suppose que pour tout  $x \in \gamma^* := \gamma([0, 1])$  on a  $R_d(x) - R_d(x_1) \leq \alpha$ .

Alors d'une part la solution  $u$  se prolonge sur  $\gamma^*$ , et d'autre part on a

$$u(x_2) - u_0(x_2) = o(e^{-\beta/|\varepsilon|}) \text{ avec } \beta = \alpha + R_d(x_1) - R_d(x_2) .$$

**Preuve.** On utilise l'équation aux variations : l'écart  $y_\varepsilon = u - u_0$  satisfait une équation de la forme

$$\varepsilon y'_\varepsilon = f(x)y_\varepsilon + \varepsilon P_1(x, u_0(x), y_\varepsilon, \varepsilon)y_\varepsilon$$

avec  $P_1$  analytique au voisinage de  $D \times \{0\}^3$ . ( $P_1$  est définie par  $P(x, u + y, \varepsilon) - P(x, u, \varepsilon) = P_1(x, u, y, \varepsilon)y$ .)

Sur un chemin  $\mathcal{C}$  contenant  $x_1$  où  $y_\varepsilon$  est définie et vérifie  $y(x) = o(1)$ , on en déduit que  $y_\varepsilon$  satisfait

$$y_\varepsilon(x) = y_\varepsilon(x_1) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F(x) - F(x_1) + O(\varepsilon))\right) = O\left(y_\varepsilon(x_1) \exp\left(\frac{1}{|\varepsilon|}(R_d(x) - R_d(x_1))\right)\right)$$

uniformément sur  $\mathcal{C}$ . Le principe classique de majoration a priori montre alors que  $y_\varepsilon$  est définie sur  $\gamma^*$  et satisfait pour tout  $x \in \gamma^*$ ,  $y(x) = o\left(\exp\left(\frac{1}{|\varepsilon|}(R_d(x) - R_d(x_1) - \alpha)\right)\right)$ .  $\square$

**Suite de la preuve du théorème 6.** Rappelons que les notations  $a$  et  $b$  ont bougé depuis l'énoncé (au début de la preuve) : il nous suffit à présent de montrer qu'il existe une solution surstable sur un domaine contenant  $]a, b[$ .

Pour  $r \in ]0, F(b)[$ , on note  $C_r$  la composante connexe contenant 0 de l'ensemble  $\{x \in D \mid |F(x)| \leq r\}$ . Si  $r$  est suffisamment petit alors, d'une part  $C_r$  est un compact de  $D$ , d'autre part, pour toute direction  $d \in \mathbb{S}^1$ , il existe une solution  $u_0^d$  surstable dans un domaine contenant  $C_r$  pour  $\arg(\varepsilon) = d$ .

Soit  $\delta, \delta' > 0$  tels que  $r = F(b) \sin \delta = F(a) \sin \delta'$  ( $\delta > \delta'$ ). Considérons le domaine  $\Delta$  délimité par des portions des courbes  $\{x \in D \mid \arg(F(a) - F(x)) = \pm\delta', |F(a) - F(x)| \leq F(a) \cos \delta'\}$  et  $\{x \in D \mid \arg(F(b) - F(x)) = \pm\delta, |F(b) - F(x)| \leq F(b) \cos \delta\}$  et par les deux portions du bord de  $C_r$  refermant ces courbes de façon à former une courbe de Jordan  $C^1$  excepté en  $a$  et  $b$ . Pour  $r$  suffisamment petit, ce domaine est relativement compact dans  $D$ . On décompose ce domaine en  $\Delta = \Delta_a \cup \Delta_b \cup C_r$ , où  $\Delta_a$  et  $\Delta_b$  sont les domaines contenant respectivement  $a$  et  $b$  dans leurs bords, dont les images par  $F$  sont les triangles de sommets respectivement  $F(a), p_a, q_a$  et  $F(b), p_b, q_b$ , avec  $p_a = r \exp i(\pi/2 - \delta')$ ,  $q_a = r \exp i(\delta' - \pi/2)$ ,  $p_b = r \exp i(\pi/2 - \delta)$ ,  $q_b = r \exp i(\delta - \pi/2)$ .

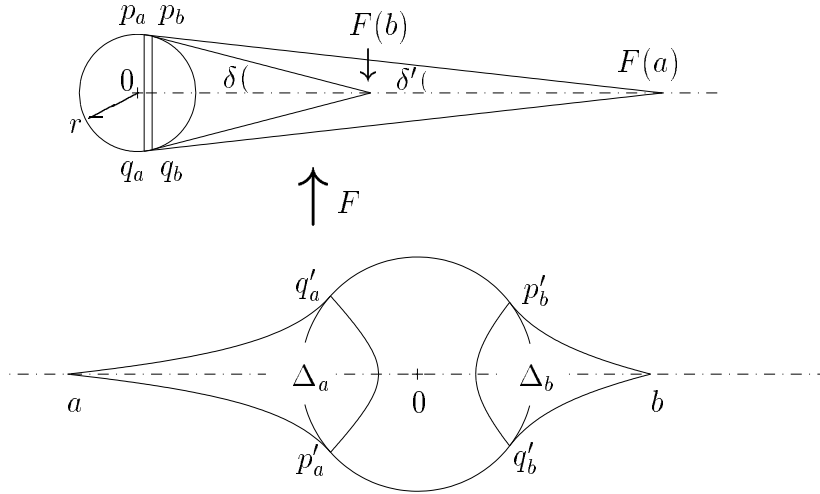


Figure 3: le domaine  $\Delta$  et son image par  $F$  (ici  $F(x) = x^2$ ). Les préimages par  $F$  sont notées avec des primes.

On considère à présent  $\varepsilon$  dans le secteur fermé  $S_\delta = \{\varepsilon \in \mathbb{C} \mid |\arg(\varepsilon)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta\}$ . Soit  $u_a$  la solution de (6) s'annulant en  $a$  et  $u_b$  la solution de (6) s'annulant en  $b$ . D'après le lemme 7 (voir aussi proposition D de [5]) ces solutions sont surstables respectivement dans  $\Delta_a \times S_{\delta'}$  et  $\Delta_b \times S_\delta$ . Puisque nous avons déjà une solution  $u_0^d$  surstable dans  $C_r$  pour chaque direction  $d$  de  $\mathbb{S}^1$ , le lemme 8 (avec respectivement  $u_0 = u_0^d$ ,  $u = u_a$  et  $u_0 = u_0^d$ ,  $u = u_b$ ) entraîne que les deux solutions  $u_a$  et  $u_b$  sont elles aussi surstables dans  $C_r \times S_{\delta'}$ , resp.  $C_r \times S_\delta$  (voir aussi le commentaire 'relation entrée-sortie' à la suite de la proposition E de [5]). En particulier elles sont définies au point  $x = 0$ . De plus, d'après le lemme 8, pour tout  $\varepsilon$

avec  $|\arg(\varepsilon)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ , on a  $u_a(0, \varepsilon) - u_b(0, \varepsilon) = O(\exp(-(r + o(1))/|\varepsilon|))$  (c'est-à-dire  $\forall \tilde{r} < r$ ,  $u_a(0, \varepsilon) - u_b(0, \varepsilon) = O(\exp(-\tilde{r}/\varepsilon))$ ).

Considérons à présent la fonction  $\varphi : \varepsilon \mapsto u_a(0, \varepsilon) - u_b(0, \varepsilon)$ . Cette fonction est analytique et bornée dans un secteur  $S_0 = \{\varepsilon \in \mathbb{C} \mid |\varepsilon| < \varepsilon_0, |\arg(\varepsilon)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta\}$ . De plus elle satisfait, pour  $|\arg(\varepsilon)| = \frac{\pi}{2} - \delta$ ,  $|\varphi(\varepsilon)| = O(\exp(-(r + o(1))/|\varepsilon|)) = O(\exp(-(F(b) + o(1))/\varepsilon))$ . D'après le théorème de Phragmén-Lindelöf, ceci reste vrai pour tout  $\varepsilon$  dans  $S_0$ . En utilisant à nouveau le lemme 8 (avec cette fois  $u_0 = u_b$ ,  $u = u_a$ ) on en déduit que, pour  $\arg(\varepsilon) = 0$ , la solution  $u_a$  est surstable dans tout le domaine  $\Delta$ .  $\square$

**Remarque :** Nous nous sommes restreints au cas particulier où  $f$  est à valeurs réelles sur l'axe réel,  $[a, b]$  est un segment réel et  $\varepsilon$  est réel positif, mais le théorème 6 s'adapte sans peine à des situations plus "complexes".

### 3.4 Des solutions surstables aux canards.

**Proposition 9.** — *S'il existe une solution surstable locale (resp. globale) de (6), alors il existe un canard  $S^\infty$  local (resp. global) de (6).*

**Preuve.** A partir d'une solution surstable locale (resp. globale) on construit une solution surstable à valeurs réelles sur l'axe réel en considérant une condition initiale réelle sur l'axe réel et en utilisant le lemme 8 précédent. Par exemple, avec les notations de la section précédente, si  $F(a) \geq F(b)$ , la solution s'annulant en un point  $\tilde{a} < a$  suffisamment proche de  $a$  est surstable sur un voisinage de  $[a, b]$  (il s'agissait d'ailleurs de la solution notée  $u_a$  dans la section précédente).

A partir d'une solution surstable locale  $u$  (resp. globale) à valeurs réelles sur l'axe réel on obtient évidemment un canard par restriction. Pour montrer que les dérivées de  $u$  sont elles aussi bornées, on utilise les formules de Cauchy pour les dérivées, en restreignant au besoin le domaine.  $\square$

### 3.5 Des canards à la solution formelle.

Jusqu'à présent, nous avons démontré toutes les implications  $i) \Rightarrow i+1)$  du théorème 3 (la dernière étant tautologique). Pour achever la preuve du théorème 3, il nous suffit donc de refermer la boucle en démontrant le résultat suivant.

**Théorème 10.** — *Si l'équation (6) possède un canard  $S^\infty$  local alors (6) possède une solution formelle  $\hat{u}(\varepsilon, x) = \sum_{n \geq 0} u_n(x) \varepsilon^n$  à coefficients  $u_n$  analytiques au voisinage de 0 dans  $\mathbb{C}$ , donnés récursivement par (12).*

**Preuve.** Raisonnons par l'absurde, et supposons d'une part que l'équation (6) a un canard  $S^\infty$   $u = u(x)$  sur un intervalle  $[-\delta, \delta]$ ,  $\delta$  indépendant de  $\varepsilon$ , et d'autre part que l'équation (6) n'a pas de solution formelle. Utilisant la proposition 4, on suppose donc qu'il existe  $n \geq 2$  tel que pour  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  :

$$u'_{k-1} - \phi_{k-1} = f u_k \quad (16)$$

et pour  $k = n$  :

$$u'_{n-1}(x) - \phi_{n-1}(x) = -a_q x^q + x^{q+1} g(x) \quad (17)$$

avec  $a_q \neq 0$ ,  $q < p$  et  $g$  holomorphe limitée dans un voisinage de  $x = 0$ . Nous allons montrer qu'une dérivée  $u^{(m)}$  est non bornée, pour un certain  $m$ . Pour cela on considère la différence entre

$u$  et la  $(n-1)$ -ième somme partielle de la solution formelle. Vue sous une “loupe” adéquate — à la fois sur la variable et sur l’inconnue — cette différence est une solution bornée d’une équation différentielle régulièrement perturbée. Il s’ensuit que le terme principal de cette solution satisfait une certaine équation différentielle qui n’a pas de solution polynomiale. Or la loupe a pour effet d’aplatir les dérivées. En revenant aux variables du début, on en déduit qu’une dérivée d’ordre suffisamment élevé de  $u$  serait non bornée, ce qui permet de conclure. Détaillons à présent la preuve.

Le changement d’inconnue adéquat est le suivant :

$$u = \sum_{k=1}^{n-1} u_k \varepsilon^k + \frac{\varepsilon^n}{\eta} v \text{ avec } \eta = \varepsilon^{\frac{p-q}{p+1}}. \quad (18)$$

**Lemme 11.** — *Si  $u$  est une solution de (6), alors la fonction  $v$  définie par (18) satisfait une équation différentielle de la forme :*

$$\varepsilon v' = (f(x) + \varepsilon Q(x, v))v + \eta (a_q x^q - x^{q+1} g(x)) + \varepsilon \eta R(x) \quad (19)$$

avec  $g, Q$  et  $R$  holomorphes et bornées pour  $x$  dans  $[-\delta, \delta]$  et pour  $v$  borné.

**Preuve.** Remplaçons l’expression (18) dans l’équation (6). On obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} u'_k \varepsilon^{k+1} + \frac{\varepsilon^{n+1}}{\eta} v' = \sum_{k=1}^{n-1} f(x) u_k \varepsilon^k + \frac{\varepsilon^n}{\eta} f(x) v + \varepsilon P \left( x, \sum_{k=1}^{n-1} u_k \varepsilon^k + \frac{\varepsilon^n}{\eta} v, \varepsilon \right). \quad (20)$$

En utilisant (16) pour  $k = 1, \dots, n-1$  et en multipliant par  $\frac{\eta}{\varepsilon^n}$ , on obtient :

$$\varepsilon v' = f(x)v - \eta(u'_{n-1}(x) - \phi_{n-1}(x)) + \frac{\eta}{\varepsilon^{n-1}} \left( P \left( x, \Sigma u + \frac{\varepsilon^n}{\eta} v, \varepsilon \right) - \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k(x) \varepsilon^k \right).$$

Majorons le dernier terme. On a

$$P \left( x, \Sigma u + \frac{\varepsilon^n}{\eta} v, \varepsilon \right) = P \left( x, \Sigma u, \varepsilon \right) + \frac{\varepsilon^n}{\eta} v Q(x, v)$$

avec

$$Q(x, v) := \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial u} \left( x, \Sigma u + \frac{\varepsilon^n}{\eta} v \theta, \varepsilon \right) d\theta.$$

De plus  $P(x, \Sigma u, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k(x) \varepsilon^k + \varepsilon^n R(x)$  avec  $R := R_n$  d’après la formule (14) du paragraphe 3.1. On en déduit le lemme en utilisant aussi (17).  $\square$

Il nous faut à présent utiliser l’attractivité de la courbe lente pour montrer que  $v$  reste borné sur  $[-\delta, 0[$ . Lorsque  $x$  est fixé strictement compris entre  $-\delta$  et 0, cela résulte simplement de la développabilité des solutions lentes ([11] ou [18] theorem 40.1). Nous allons voir que ceci persiste pour certains  $x < 0$  de l’ordre de  $\varepsilon^{\frac{1}{p+1}}$ . Schématiquement la raison est que, pour de tels  $x$  avec  $|x \varepsilon^{-\frac{1}{p+1}}|$  suffisamment grand, le terme prépondérant du membre de droite de (19) est  $f(x)v$ , qui est du signe contraire de  $v$ .

**Lemme 12.** — *Pour tout  $r > 0$ , il existe  $\varepsilon_1 > 0$  et  $Z > 0$  tels que  $|v(\varepsilon, x)| \leq r$  pour tout  $x < -Z \varepsilon^{1/(p+1)}$  et  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ .*

**Preuve.** Il suffit de le démontrer pour  $r$  suffisamment petit. On sait déjà que  $v(\varepsilon, x) = \mathcal{O}(\eta)$  sur tout intervalle de la forme  $[a, -\delta]$  avec  $\delta > 0$  indépendant de  $\varepsilon$ . Si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, il reste à montrer l'énoncé sur  $[-\delta, -Z\varepsilon^{1/(p+1)}[$  pour  $Z$  bien choisi.

D'après les hypothèses, pour tout  $r > 0$  suffisamment petit, il existe  $K > 0$  tel que  $|Q(\varepsilon, x, v)| \leq K$  pour tout  $x \leq 0$ ,  $|v| \leq r$  et  $\varepsilon$  petit. De plus il existe  $\mu > 0$  tel que  $f(x) \leq -\mu|x|^p$  pour  $-\delta \leq x \leq 0$ .

Il suffit de montrer que l'ensemble  $\{|v| \leq r\}$  est un ensemble invariant pour (19) sur  $[-\delta, -Z\varepsilon^{1/(p+1)}[$ , si  $Z$  est bien choisi. Il suffit donc de montrer que, pour tout  $x < -Z\varepsilon^{1/(p+1)}$ , on a  $v'(\varepsilon, x) < 0$  si  $v(\varepsilon, x) = r$  (et de même que  $v'(\varepsilon, x) > 0$  si  $v(\varepsilon, x) = -r$ ).

En posant  $x = -z\varepsilon^{1/(p+1)}$  et en supposant que  $v(\varepsilon, x) = r$ , on obtient par (19)

$$\varepsilon v'(\varepsilon, x) \leq -\mu r \varepsilon^{p/(p+1)} z^p + |a_q| \varepsilon^{p/(p+1)} z^q + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

et donc  $v'(\varepsilon, x) < 0$  si  $z > Z$ , avec  $Z := \left(\frac{|a_q|}{\mu r} + 1\right)^{1/(p-q)}$ , et si  $\varepsilon$  est suffisamment petit.  $\square$

Effectuons à présent le changement de variables  $x = \varepsilon^{\frac{1}{p+1}} X$ ,  $V(X) = v(x)$  et  $f(x) = \varepsilon^{\frac{p}{p+1}} F(X)$ . On a ainsi pour tout  $X$  borné,  $F(X) = X^p(\lambda + o(1))$ , avec  $\lambda$  fixé non nul.

L'équation (19) devient alors, en désignant par un point la dérivation par rapport à  $X$  :

$$\dot{V} = \lambda X^p V + a_q X^q + \alpha \tilde{P}(\varepsilon, X, V) \quad (21)$$

où  $\alpha$  est un nombre qui tend vers 0 avec  $\varepsilon$  et où  $\tilde{P}$  est une fonction holomorphe et bornée pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  et pour  $X, V$  bornés. Le lemme 12 précédent fournit une condition initiale  $X_0 = X_0(\varepsilon)$ , négative et bornée, telle que  $V(X_0)$  est borné. Par compacité, on peut aussi supposer que  $X_0(\varepsilon)$  a une limite, notée  ${}^\circ X_0$ , quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  ; on note  ${}^\circ V$  la limite de  $V(X_0)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Lemme 13.** — *Soit  $W$  la solution de l'équation*

$$\dot{W} = \lambda X^p W + a_q X^q \quad (22)$$

*de condition initiale  $W({}^\circ X_0) = {}^\circ V$ . Alors pour tout entier fixé  $m$  et pour tout  $X$  borné on a*

$$V^{(m)}(X) \rightarrow W^{(m)}(X), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

**Preuve.** On considère les équation (21) et (22) dans le champ complexe. La fonction  $W$  étant solution d'une équation différentielle linéaire sans singularité, elle est entière. D'après le théorème classique de dépendance continue par rapport aux paramètres (en restriction sur chaque demi-droite issue de  $X_0$  on obtient une équation différentielle réelle à valeurs dans  $\mathbb{C}$  que l'on peut identifier à  $\mathbb{R}^2$ ) on en déduit que la solution  $V$  est définie en tout point complexe borné, et que  $V(X) \rightarrow W(X)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour tout  $X$  complexe borné. Pour les dérivées on utilise alors les inégalités de Cauchy (on peut aussi utiliser l'équation différentielle).  $\square$

La preuve de l'énoncé suivant est immédiate.

**Lemme 14.** — *L'équation (22) n'a pas de solution polynomiale.*

$\square$

Revenons à la preuve du théorème 10. On déduit des lemmes 13 et 14 que pour tout entier fixé  $m$ , il existe  $X_m \in \mathbb{R}$  et  $a_m > 0$  indépendants de  $\varepsilon$  tels que  $|V^{(m)}(X_m)| \geq a_m$  (choisir  $a_m := \frac{1}{2} W^{(m)}(X_m)$  avec  $W^{(m)}(X_m) \neq 0$ ). On en déduit, avec  $x_m := \varepsilon^{\frac{1}{p+1}} X_m$ , que  $|v^{(m)}(x_m)| = \varepsilon^{\frac{m}{p+1}} |V^{(m)}(X_m)| \geq \varepsilon^{\frac{m}{p+1}} a_m$ , d'où  $u^{(m)}(x_m) = O(1) + \varepsilon^{n + \frac{q-p-m}{p+1}} \alpha_m$ ,  $|\alpha_m| \geq a_m$ . Pour  $m > n(p+1)$  le module de  $u^{(m)}(x_m)$  tend donc vers  $+\infty$ , ce qui contredit l'hypothèse du théorème 10.  $\square$

## 4 Application aux équations linéaires du deuxième ordre.

Nous revenons dans cette partie à l'équation (1)

$$\varepsilon y'' + \varphi(x, \varepsilon)y' + \psi(x, \varepsilon)y = 0$$

où  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux fonctions analytiques en les variables  $x$  et  $\varepsilon$  dans un voisinage de  $[a, b] \times \{0\}$  de  $\mathbb{C}^2$ . Comme dans l'introduction, on note  $\varphi_0$  et  $\psi_0$  les fonctions de la variable  $x$  obtenues pour  $\varepsilon = 0$ . On suppose que  $\varphi_0$  a un unique zéro dans  $[a, b]$  au point 0 et on note  $p$  l'ordre de ce zéro. On suppose de plus que  $\varphi_0$  est positive sur  $[a, 0[$  et négative sur  $]0, b]$  (donc  $p$  est impair).

Comme précédemment la dérivation est par rapport à  $x$ , et nous omettons la dépendance en  $\varepsilon$ . Le terme "borné" signifie donc "borné uniformément par rapport à  $\varepsilon$ ".

**Définition 15.** — Soit  $I \subset [a, b]$  un intervalle contenant 0 dans son intérieur. On appelle *solution résonnante*  $S^\infty$  sur  $I$  une solution de (1) bornée sur  $I$ , ne tendant pas vers la fonction nulle sur  $I$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et dont les dérivées à tout ordre restent bornées sur  $I$ .

Une *solution résonnante*  $S^\infty$  *locale* est une solution résonnante  $S^\infty$  sur un intervalle ouvert contenant 0.

Une *solution résonnante*  $S^\infty$  *globale* est une solution résonnante  $S^\infty$  sur un intervalle ouvert contenant  $[a, b]$ .

Nous faisons à présent l'hypothèse supplémentaire suivante.

**HYPOTHÈSE 4.** — *La fonction  $\psi_0$  a un zéro d'ordre au moins  $p$  en 0.*

Dans le cas où cette hypothèse n'était pas satisfaite, il est possible de montrer que, s'il existe une solution résonnante, alors la fonction  $\psi_0$  a un zéro d'ordre au moins  $p - 1$  et la quantité  $x\psi_0(x)/\varphi_0(x)$  tend vers un entier congru à 0 ou 1 modulo  $p + 1$  lorsque  $x \rightarrow 0$ . Nous espérons pouvoir nous ramener au cas où cet entier serait 0 par des changements d'inconnue rationnels sur  $v$  du même type que dans [2].

**Théorème 16.** — *Avec les hypothèses et notations précédentes, les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *Il existe une solution formelle  $\hat{y}(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} y_n(x)\varepsilon^n$  de (1) dont les coefficients  $y_n$  sont analytiques au voisinage de 0.*
- 2) *Il existe une solution résonnante  $S^\infty$  locale.*
- 3) *Il existe une solution résonnante  $S^\infty$  globale.*

**Preuve.** Comme annoncé dans l'introduction, on utilise l'équation de Riccati associée : posons  $v = \frac{y'}{y}$ . Ceci nous conduit à l'équation

$$\varepsilon v' = -\varphi(x, \varepsilon)v - \psi(x, \varepsilon) - \varepsilon v^2 \quad (23)$$

munie de la courbe lente  $v_0 = -\frac{\psi_0}{\varphi_0}$ . Avec l'hypothèse 4 précédente, cette courbe lente est analytique sur  $[a, b]$ . Le changement d'inconnue  $v = v_0 + u$  aboutit à l'équation (6)

$$\varepsilon u' = f(x)u + \varepsilon P(x, u, \varepsilon)$$

où  $f = -\varphi_0$  et

$$P = \frac{\varphi_0 - \varphi}{\varepsilon}u + \frac{\varphi\psi_0 - \varphi_0\psi}{\varepsilon\varphi_0} + \frac{1}{\varphi_0^2}(\varphi_0'\psi_0 - \varphi_0\psi_0') - \left(-\frac{\psi_0}{\varphi_0} + u\right)^2. \quad (24)$$



Ces fonctions satisfont les hypothèses 1, 2 et 3 du paragraphe 2.1, et le théorème 3 s'applique. Il suffit donc d'établir le lien entre les solutions formelles de l'équation (1) et celles de (6) d'une part, et entre les solutions résonnantes de (1) et les canards de (6) d'autre part. En d'autres termes, la preuve du théorème 16 repose sur l'énoncé suivant.  $\square$

**Proposition 17.** — 1. L'équation (1) possède une solution formelle  $\hat{y}(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} y_n(x) \varepsilon^n$  à coefficients analytiques sur  $[a, b]$  si et seulement si (6) possède une solution formelle  $\hat{u}(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 1} u_n(x) \varepsilon^n$  à coefficients analytiques sur  $[a, b]$ .

2. Soit  $y$  une solution de l'équation (1), et  $u = \frac{y'}{y} - v_0 = \frac{y'}{y} + \frac{\psi_0}{\varphi_0}$  la solution correspondante de l'équation (6). Alors la fonction  $y$  est une solution résonnante  $S^\infty$  locale (resp. globale) de (1) si et seulement si la fonction  $u$  est un canard  $S^\infty$  local (resp. global) de (6).

**Preuve.** 1. Si l'équation (1) possède une solution formelle  $\hat{y}(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} y_n(x) \varepsilon^n$  à coefficients analytiques sur  $[a, b]$  alors le premier terme  $y_0$  est une solution non triviale d'une équation du premier ordre *non singulière* (simplifier par  $x^p$  l'équation réduite) donc ne s'annule pas sur  $[a, b]$ . Il s'ensuit que (6) possède aussi une solution formelle  $\hat{u} = \frac{\hat{y}'}{\hat{y}} + \frac{\psi_0}{\varphi_0}$ , dont le premier terme est nul. Réciproquement, si  $\hat{u}(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 1} u_n(x) \varepsilon^n$  est une solution formelle de (6), alors l'expression  $\exp\left(\int_0^x (v_0(\xi) + \hat{u}(\xi, \varepsilon)) d\xi\right)$  est une série formelle qui satisfait formellement l'équation (1).

2. L'équivalence entre la résonance au sens de Ackerberg-O'Malley (c'est-à-dire non nécessairement  $S^\infty$ ) de l'équation linéaire (1) et la présence de canards pour l'équation de Riccati associée (23) a été établie dans [7]. Les résultats de Jean-Louis Callot sont aussi reproduits dans [3]. Par ailleurs, puisque les solutions  $u$  et  $v$  de (6) et (23) sont liées par  $u = v - v_0$ , les énoncés concernant  $u$  sont équivalents à ceux concernant  $v$ .

Il reste à montrer que  $y^{(n)}$  est bornée pour tout  $n$  si et seulement si  $v^{(n)}$  est bornée pour tout  $n$ . Pour cela on montre par récurrence sur  $n > 0$  par un calcul direct que  $v^{(n-1)}$  est de la forme

$$v^{(n-1)} = \frac{y^{(n)}}{y} - \frac{P_n(y, y', \dots, y^{(n-1)})}{y^n} \quad (25)$$

où  $P_n$  est un polynôme. Puisque la fonction  $y_0$  ne s'annule pas sur  $[a, b]$ , il s'ensuit que  $y^{(n)}$  bornée entraîne  $v^{(n)}$  bornée. Réciproquement,  $y^{(n)}$  s'écrit en fonction de  $v^{(n-1)}$  et de  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  grâce à (25), donc par récurrence,  $y^{(n)}$  s'écrit en fonction de  $y$  et des  $v^{(i)}$  pour  $i < n$ .  $\square$

## 5 Construction d'équations résonnantes.

On se propose de construire une équation

$$\varepsilon y'' - 2x y' + g(x, \varepsilon) y = 0 \quad (26)$$

avec  $g$  analytique en  $x, \varepsilon$  au voisinage de  $0 \in \mathbb{C}^2$ , qui possède des solutions résonnantes, et dont toutes les solutions formelles non nulles sont divergentes. Dans un but de simplicité,

nous traitons uniquement le cas  $y_0(x) \equiv 1$ , ce qui est équivalent au cas  $g(x, 0) \equiv 0$ . Nous supposons aussi pour des raisons techniques  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ , avec  $\varepsilon_0 \leq 1$  fixé. L'avantage d'avoir fixé le coefficient de  $y'$  est le suivant : si  $y_1$  est une solution de (26), alors une deuxième solution est donnée par  $y_2 = Ty_1$ , où

$$(Ty)(x, \varepsilon) = y(x, \varepsilon) \int_0^x e^{t^2/\varepsilon} y(t, \varepsilon)^{-2} dt . \quad (27)$$

La méthode de construction est la suivante :

1. On construit une fonction  $z : D \times S \rightarrow \mathbb{C}$ , où  $D = D(0, 1) \subset \mathbb{C}$  est le disque ouvert unité, et  $S$  est le secteur  $S(-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \varepsilon_0)$  de la surface de Riemann du logarithme, telle que

$$z(0, \varepsilon) \equiv 1 \text{ et } z(x, \varepsilon) \rightarrow 1 \text{ quand } S \ni \varepsilon \rightarrow 0 \quad (28)$$

uniformément sur  $D$ , et vérifiant de plus

$$z(x, \varepsilon e^{2\pi i}) = z(x, \varepsilon) + e^{2/\varepsilon}(Tz)(x, \varepsilon) \text{ quand } |\arg \varepsilon + \pi| < \frac{\pi}{4} , \quad (29)$$

où  $T$  est l'opérateur défini par (27).

2. On montre que l'équation (26) satisfaite par  $z$ , c'est-à-dire avec

$$g(x, \varepsilon) = -\varepsilon \frac{z''}{z}(x, \varepsilon) + 2x \frac{z'}{z}(x, \varepsilon) , \quad (30)$$

est un exemple non trivial d'équation avec une solution résonnante  $S^\infty$ , dans le sens où la seule solution formelle convergente est la solution nulle.

En bref, on construit une équation (26) telle que sa solution résonnante  $S^\infty$  a une monodromie prescrite quand  $\varepsilon$  fait un tour autour de 0.

**Remarques :** 1. On peut remplacer la constante  $y_0(x) \equiv 1$  par toute fonction qui ne s'annule pas sur l'adhérence de  $D$ . On peut remplacer le coefficient  $2x$  de  $y'$  par d'autres fonctions de  $x$  ou de  $(x, \varepsilon)$  – ceci est en particulier intéressant pour les cas  $x^p$ ,  $p$  impaire.

2. On peut remplacer  $e^{2/\varepsilon}$  par une fonction analytique arbitraire sur le secteur  $|\arg \varepsilon + \pi| < \frac{\pi}{4}$  à condition qu'elle soit exponentiellement petite. On peut remplacer le secteur  $S$  par tout bon recouvrement convenable. La taille du voisinage de 0 pour lequel  $z$  peut être construite, dépend de la constante (ici 2) et du recouvrement. Ceci permet de construire des équations résonnantes sur d'autres domaines en  $x$ .

3. La fonction  $z$  ne prend probablement pas de valeurs réelles lorsque  $x$  et  $\varepsilon$  sont réels et positifs, mais ceci peut être accompli en utilisant une équation plus "symétrique", par exemple

$$z(x, \varepsilon e^{\pi i}) - i e^{-2/\varepsilon}(Tz)(x, \varepsilon e^{\pi i}) = z(x, \varepsilon e^{-\pi i}) + i e^{-2/\varepsilon}(Tz)(x, \varepsilon e^{-\pi i}) \text{ quand } |\arg \varepsilon| < \frac{\pi}{4} .$$

Le point 1 de la méthode décrite précédemment est relativement technique et délicat. Nous l'exposerons à la fin de l'article (théorème 19). En ce qui concerne le point 2, il faut montrer d'une part que  $g$  est analytique en  $x$  et  $\varepsilon$ , et d'autre part que toutes les solutions non nulles sont divergentes. La présence du terme  $e^{2/\varepsilon}$  dans (28) est déjà un indice de la divergence d'un développement éventuel de  $z$ .

Admettons pour l'instant qu'il existe une fonction  $z$  satisfaisant (28) et (29). En diminuant  $\varepsilon_0$  si nécessaire, on définit alors une fonction  $g : D \times S \rightarrow \mathbb{C}$  par (30). Montrons que  $g$  est bien analytique en  $x$  et  $\varepsilon$  :

**Proposition 18.** — La fonction  $g$  définie par (30) est uniforme ; autrement dit :

$$g(x, \varepsilon e^{2\pi i}) = g(x, \varepsilon) \text{ pour } x \in D, \varepsilon \in S, |\arg \varepsilon + \pi| < \frac{\pi}{4}.$$

**Preuve.** On peut le vérifier bien sûr par un petit calcul, mais ce n'est pas nécessaire. On définit  $g$  par (30). Alors  $z$  satisfait (26) avec cette fonction  $g$ . Nous avons vu que  $Tz$  satisfait la même équation, donc le côté droit de (29) aussi. En utilisant (29), on obtient que  $z(x, \varepsilon)$  et  $z(x, \varepsilon e^{2\pi i})$  satisfont la même équation (26) pour  $x \in D$  et  $|\arg \varepsilon + \pi| < \frac{\pi}{4}$ . En utilisant de nouveau (30), on obtient l'énoncé.  $\square$

Puisque  $|(Tz)(x, \varepsilon)| \leq C e^{|x|^2/|\varepsilon|}$  quand  $x \in D, |\arg \varepsilon + \pi| < \frac{\pi}{4}$ , la différence  $z(x, \varepsilon e^{2\pi i}) - z(x, \varepsilon)$  est exponentiellement petite quand  $|\arg \varepsilon + \pi| < \frac{\pi}{4}, \varepsilon \rightarrow 0$ , uniformément pour  $x \in D$ . D'après un théorème de Ramis–Sibuya (voir aussi ci-dessous),  $z(x, \varepsilon)$  possède donc un développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . On note  $\hat{z}(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x) \varepsilon^n$  la série formelle correspondante.

Puisque la fonction  $z$  n'est pas uniforme, la série  $\hat{z}$  est nécessairement divergente pour certaines valeurs de  $x \neq 0$ . On se propose à présent de trouver des équivalents asymptotiques de  $z_n(x)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , pour  $x \neq 0, \arg x \notin \frac{\pi}{4}\mathbf{Z}$ .

D'après (28), on obtient, quand  $\arg \varepsilon = \pm\pi, \varepsilon \rightarrow 0$

$$Tz(x, \varepsilon) \sim \frac{1}{2} \sqrt{-\pi \varepsilon} \text{ si } |\arg x| < \frac{\pi}{4} \text{ ou } |\arg x - \pi| < \frac{\pi}{4},$$

et

$$Tz(x, \varepsilon) \sim \frac{\varepsilon}{2x} e^{x^2/\varepsilon} \text{ si } |\arg x \pm \pi/2| < \frac{\pi}{4}.$$

Bien sûr, ces développements ne sont uniformes par rapport à  $x$  que dans des compacts contenus dans les divers secteurs. Ceci implique

$$z(x, \varepsilon e^{2\pi i}) - z(x, \varepsilon) \sim \frac{1}{2} \sqrt{-\pi \varepsilon} e^{2/\varepsilon} \text{ resp. } z(x, \varepsilon e^{2\pi i}) - z(x, \varepsilon) \sim \frac{\varepsilon}{2x} \exp\left(\frac{2+x^2}{\varepsilon}\right) \quad (31)$$

dans les mêmes cas qu'avant. En utilisant la formule de Cauchy-Heine [17]

$$z(x, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon_0 e^{-\pi i}}^{\varepsilon_0 e^{\pi i}} z(x, \mu) \frac{d\mu}{\mu - \varepsilon} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\varepsilon_0 e^{-\pi i}} (z(x, \mu) - z(x, \mu e^{2\pi i})) \frac{d\mu}{\mu - \varepsilon}$$

( $x \in D, |\varepsilon| < \varepsilon_0, |\arg \varepsilon| < \pi$ ) on obtient

$$z_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon_0 e^{-\pi i}}^{\varepsilon_0 e^{\pi i}} z(x, \mu) \mu^{-n} \frac{d\mu}{\mu} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\varepsilon_0 e^{-\pi i}} (z(x, \mu) - z(x, \mu e^{2\pi i})) \mu^{-n} \frac{d\mu}{\mu}.$$

En utilisant (31), ceci nous donne l'existence d'une constante  $C \neq 0$  et d'une fonction analytique  $G \neq 0$  telles que

$$z_n(x) \sim C 2^{-n} \Gamma(n - \frac{1}{2}) \text{ resp. } z_n(x) \sim G(x) (2+x^2)^{-n} \Gamma(n-1)$$

quand  $n \rightarrow \infty$  dans les cas introduits ci-dessus, avec en outre  $\arg x \notin \frac{\pi}{2}\mathbf{Z}$ .

Ceci confirme le caractère divergent et Gevrey 1 de  $\hat{z}$ . A priori il semble possible de construire une solution convergente en multipliant  $\hat{z}$  par une certaine série formelle indépendante de  $x$ . Ce n'est pas le cas, car  $\hat{z}(x, \varepsilon)$  est déjà convergente pour la valeur  $x = 0$ . Par ailleurs toute solution

formelle de (26) est nécessairement un multiple de  $\hat{z}$ . En effet, le wronskien de deux solutions est un multiple de  $e^{x^2/\varepsilon}$ , donc il ne peut pas y avoir deux solutions formelles indépendantes.

Par conséquent, si l'on a trouvé une fonction  $z$  satisfaisant (28) et (29), on obtient bien un exemple d'équation analytique de la forme (26) ayant une solution résonnante  $S^\infty$ , mais dont toutes les solutions formelles non nulles sont divergentes.

On pourrait aussi penser qu'une série  $\hat{y}(t, \varepsilon^{1/s}) = \hat{z}(t\varepsilon^{r/s}, \varepsilon)$  converge pour certains entiers positifs  $r, s$ . Ceci n'est pas vrai non plus : la dérivée  $\frac{d\hat{y}}{dt}(t, \varepsilon^{1/s}) = \frac{d\hat{z}}{dx}(t\varepsilon^{r/s}, \varepsilon)\varepsilon^{r/s}$  devrait être convergente, mais  $\frac{d\hat{z}}{dx}(0, \varepsilon)$  diverge. En effet, d'après (28) et (29), la dérivée  $\frac{dz}{dx}(0, \varepsilon)$  de  $z$  satisfait

$$\frac{dz}{dx}(0, \varepsilon e^{2\pi i}) = \frac{dz}{dx}(0, \varepsilon) + e^{2/\varepsilon}$$

quand  $|\arg \varepsilon + \pi| < \frac{\pi}{4}$ . Comme précédemment, ceci entraîne que les coefficients  $d_n$  de sa série asymptotique pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  satisfont  $d_n \sim C 2^{-n}(n-1)!$  quand  $n \rightarrow \infty$ ; elle est donc divergente.

**Théorème 19.** — *Pour  $\varepsilon_0$  suffisamment petit, il existe une fonction  $z$  satisfaisant (28) et (29).*

**Preuve.** On pose  $z(x, \varepsilon) = 1 + u(x, \varepsilon)$  et il reste à montrer l'existence d'une fonction  $u : D \times S \rightarrow \mathbb{C}$ , telle que  $u(0, \varepsilon) \equiv 0$ ,  $u = \mathcal{O}(\varepsilon)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  uniformément pour  $x \in D$  et

$$u(x, \varepsilon e^{2\pi i}) = u(x, \varepsilon) + e^{2/\varepsilon} [T(1 + u)](x, \varepsilon) \quad (32)$$

quand  $x \in D$ ,  $\varepsilon \in S$ ,  $|\arg \varepsilon + \pi| < \frac{\pi}{4}$ . Ceci sera fait en réécrivant (32) comme équation de point fixe. Pour cela on introduit deux types d'espaces de Banach :

- $\mathcal{B}(D)$ , l'espace des fonctions  $v(x, \varepsilon)$  analytiques sur  $D \times V$ ,  $V = S(-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \varepsilon_0)$ , pour lesquelles il existe une constante  $C$  satisfaisant  $|v(x, \varepsilon)| \leq C|\varepsilon|^2$  quand  $x \in D$ ,  $\varepsilon \in V$ . Comme norme  $\|\cdot\|_2$  sur  $\mathcal{B}(D)$  on choisit l'infimum de ces constantes  $C$ .
- $\mathcal{E}(D)$ , l'espace des fonctions  $w(x, \varepsilon)$  analytiques sur  $D \times S$ ,  $S = S(-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \varepsilon_0)$ , pour lesquelles il existe une constante  $K$  satisfaisant  $|w(x, \varepsilon)| \leq K|\varepsilon|$  quand  $x \in D$ ,  $\varepsilon \in S$ . Comme norme  $\|\cdot\|_1$  sur  $\mathcal{E}(D)$  on choisit l'infimum de ces constantes  $K$ .

Pour des fonctions  $v : V \rightarrow \mathbb{C}$  et  $w : S \rightarrow \mathbb{C}$  on introduit de manière analogue les espaces  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{E}$ .

On utilise le lemme suivant dont la démonstration est donnée plus bas :

**Lemme 20.** — *Il existe un opérateur linéaire continu  $\Sigma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$  tel que, pour tout  $v \in \mathcal{B}$ , l'image  $w = \Sigma v$  satisfait*

$$w(\varepsilon e^{2\pi i}) = w(\varepsilon) + v(\varepsilon) \quad \text{quand } \varepsilon \in V. \quad (33)$$

On introduit à présent l'opérateur  $\Sigma_\varepsilon : \mathcal{B}(D) \rightarrow \mathcal{E}(D)$  défini par  $(\Sigma_\varepsilon v)(x, \cdot) = \Sigma[v(x, \cdot)]$  pour tout  $x \in D$ .

Il suffit de trouver un point fixe  $u$  proche de  $0 \in \mathcal{E}(D)$  de  $\Sigma_\varepsilon \tilde{T}$  satisfaisant  $u(0, \varepsilon) \equiv 0$ , où  $\tilde{T} : \mathcal{E}(D) \supset D_{\tilde{T}} \rightarrow \mathcal{B}(D)$  est défini par

$$(\tilde{T}w)(x, \varepsilon) = e^{2/\varepsilon} [T(1 + w)](x, \varepsilon) \quad \text{quand } x \in D, \varepsilon \in V.$$

Ici  $D_{\tilde{T}}$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{E}(D)$  des fonctions satisfaisant  $|w(x, \varepsilon)| \leq \frac{1}{2}$ . L'opérateur  $\tilde{T}$  est bien défini, car  $e^{2/\varepsilon}$  est exponentiellement petit.

Il est standard de montrer que l'application  $\Sigma_\varepsilon \tilde{T}$  est une contraction si  $\varepsilon_0$  est suffisamment petit. Par conséquent, elle possède un point fixe  $u \in \mathcal{E}(D)$ . Par définition de  $\tilde{T}$  et  $\Sigma_\varepsilon$ , on vérifie que  $u(0, \varepsilon) \equiv 0$ .  $\square$

**Démonstration du lemme 20.** La construction d'une fonction holomorphe à monodromie prescrite est classique : étant donnée  $v$  analytique sur  $V$ , la fonction  $w : S(-\pi, \pi, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$w(\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\varepsilon_0} v(\mu) \frac{d\mu}{\mu - \varepsilon} \quad (34)$$

où l'intégration est effectuée sur le segment peut être prolongée en une fonction analytique, aussi appelée  $w$ , sur  $S$  tout entier, qui satisfait à (33). Néanmoins  $w$  présente une singularité logarithmique au point  $-\varepsilon_0$  et n'est pas élément de  $\mathcal{E}$ . Pour surmonter la difficulté, on considère une moyenne d'intégrales de la forme (34), en faisant parcourir à la borne d'intégration un arc de cercle. Pour tenir compte des normes de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{E}$ , nous introduisons un facteur  $\varepsilon/\mu$  dans les intégrales.

Pour  $v \in \mathcal{B}$ , nous définissons  $(\Sigma v)(\varepsilon) = \frac{4}{\pi} \int_{-\pi/8}^{\pi/8} w_\theta(\varepsilon) d\theta$ , où  $w_\theta : S \rightarrow \mathbb{C}$  est définie par

$$w_\theta(\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{\varepsilon_\theta} \frac{\varepsilon}{\mu} v(\mu) \frac{d\mu}{\mu - \varepsilon} \quad \text{quand } \varepsilon \in S \text{ et } \theta \in [-\pi/8, \pi/8]. \quad (35)$$

Ici  $\varepsilon_\theta = -\varepsilon_0 \exp(\theta i)$ ; si  $-3\pi/4 \leq \arg \varepsilon \leq 3\pi/4$  alors le chemin d'intégration est le segment de 0 à  $\varepsilon_\theta$ , si  $\arg \varepsilon < -3\pi/4$ , le chemin d'intégration passe au-dessus de  $\varepsilon$ , si  $\arg \varepsilon > 3\pi/4$ , le chemin d'intégration passe au-dessous de  $\varepsilon$ .

La formule de Cauchy montre que  $w_\theta$  satisfait à (33) pour tout  $\theta$  ; par conséquent,  $w = \Sigma v$  aussi. Il reste à montrer que  $w \in \mathcal{E}$  et qu'il existe  $K > 0$  tel que  $\|\Sigma v\|_1 \leq K \|v\|_2$  pour tout  $v \in \mathcal{B}$ .

Majorons d'abord  $w_\theta(\varepsilon)$ . Pour  $-3\pi/4 \leq \arg \varepsilon \leq 3\pi/4$ , on a  $|\mu - \varepsilon| \geq |\mu| \sin \frac{\pi}{8}$ , donc  $\left| \frac{1}{\varepsilon} w_\theta(\varepsilon) \right| \leq C_1 \|v\|_2$  avec  $C_1 = \frac{\varepsilon_0}{2\pi \sin(\pi/8)}$ .

Pour  $-5\pi/4 < \arg \varepsilon < -3\pi/4$ , nous allons montrer que

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} w_\theta(\varepsilon) \right| \leq \left( C_1 + \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{\gamma(\theta, \arg \varepsilon + \pi)} \frac{1}{|\mu - \varepsilon|} |d\mu| \right) \|v\| \quad (36)$$

où  $C_1$  est comme précédemment et  $\gamma(\theta, \psi)$  est le chemin paramétré par  $\mu = \varepsilon_0 e^{\phi i}$ ,  $\phi$  parcourant  $[-\frac{5\pi}{4}, \theta - \pi]$ , si  $\theta < \psi$ , mais parcourant  $[\theta - \pi, -\frac{3\pi}{4}]$  si  $\psi \leq \theta$ . En effet, si  $\theta < \psi = \arg \varepsilon + \pi < \frac{\pi}{4}$ , on peut utiliser comme chemin d'intégration de 0 à  $\varepsilon_\theta$  des chemins  $\tilde{\gamma}$  arbitrairement proches de  $\gamma_1 \cup \gamma(\theta, \psi)$  (où  $\gamma_1$  est le segment de 0 à  $\varepsilon_0 e^{-5\pi i/4}$ ) qui sont encore à l'intérieur de  $V$ . L'estimation

$$\left| \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{\mu(\mu - \varepsilon)} v(\mu) d\mu \right| \leq \int_{\tilde{\gamma}} \left| \frac{\mu}{(\mu - \varepsilon)} \right| |d\mu| \|v\|_2$$

pour tout  $\tilde{\gamma}$  et la limite  $\tilde{\gamma} \rightarrow \gamma_1 + \gamma(\theta, \psi)$  nous donnent

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} w_\theta(\varepsilon) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1 + \gamma(\theta, \psi)} \frac{|\mu|}{|\mu - \varepsilon|} |d\mu| \|v\|_2.$$

Comme dans le cas précédent, on obtient  $\int_{\gamma_1} \frac{|\mu|}{|\mu - \varepsilon|} |d\mu| \leq \frac{\varepsilon_0}{\sin(\pi/8)}$ . Pour l'autre intégrale, il suffit d'utiliser  $|\mu| \leq \varepsilon_0$  sur  $\gamma(\theta, \psi)$ . En combinant les deux estimations, on obtient (36) pour  $\theta < \arg \varepsilon + \pi$  (sans le terme  $\varepsilon_0$ ).

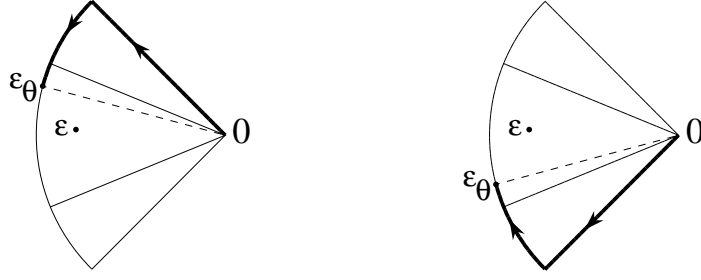


Figure 4: le chemin  $\gamma_1 \cup \gamma(\theta, \psi)$ , à gauche lorsque  $\theta < \psi$ , à droite lorsque  $\psi \leq \theta$ .

Quand  $\arg \varepsilon + \pi \leq \theta$ , on utilise d'abord la formule de Cauchy qui montre

$$w_\theta(\varepsilon) = v(\varepsilon) + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\varepsilon\theta} \frac{\varepsilon}{\mu(\mu - \varepsilon)} v(\mu) d\mu,$$

où maintenant le chemin d'intégration de 0 à  $\varepsilon\theta$  passe au-dessous de  $\varepsilon$ . Les estimations pour l'intégrale sont identiques à celles du sous-cas précédent, à l'exception d'un terme additionnel à majorer :  $\frac{1}{\varepsilon} v(\varepsilon) \leq \varepsilon_0 \|v\|$ . Nous avons donc montré (36) aussi dans le deuxième sous-cas.

Pour  $3\pi/4 \leq \arg \varepsilon \leq 5\pi/4$ , on obtient de manière analogue

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} w_\theta(\varepsilon) \right| \leq \left( C_1 + \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{\gamma(\theta, \arg \varepsilon - \pi)} \frac{1}{|\mu - \varepsilon|} |d\mu| \right) \|v\|_2. \quad (37)$$

Rappelons que  $(\Sigma v)(\varepsilon) = \frac{4}{\pi} \int_{-\pi/8}^{\pi/8} w_\theta(\varepsilon) d\theta$ . Pour montrer que  $\Sigma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$  est continue, il suffit donc de montrer qu'il existe  $K > 0$  tel que

$$\int_{-\pi/8}^{\pi/8} d\theta \int_{\gamma(\theta, \arg \varepsilon + \pi)} \frac{1}{|\mu - \varepsilon|} |d\mu| \leq K \quad (38)$$

pour tout  $\varepsilon$  vérifiant  $-5\pi/4 \leq \arg \varepsilon \leq -3\pi/4$ ,  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ . En coupant l'intégrale extérieure à  $\theta = \arg \varepsilon + \pi$ , si cette valeur est dans  $[-\pi/8, \pi/8]$ , on voit que la double intégrale prend son maximum quand  $\arg \varepsilon = -\pi$ . Il suffit donc de majorer  $2 \int_0^{\pi/8} d\theta \int_\theta^{\pi/4} \frac{1}{|e^{si} + \varepsilon/\varepsilon_0|} ds$  dans ce cas. Comme le dénominateur est minoré par  $\sin s$ , le théorème de Fubini-Tonelli nous donne (38) avec  $K = 2 \int_0^{\pi/4} \frac{s}{\sin s} ds$  (en effectuant l'intégration sur tout le triangle  $0 \leq \theta \leq s \leq \pi/4$  au lieu du quadrilatère  $0 \leq \theta \leq \pi/8$ ,  $\theta \leq s \leq \pi/4$ ).  $\square$

## References

- [1] R.C. ACKERBERG, R.E. O'MALLEY, *Boundary layer Problems Exhibiting Resonance*, Studies in Appl. Math., 49 no 3 (1970) 277-295.
- [2] E. BENOÎT, *Asymptotic expansions of canards with poles. Application to the stationary uni-dimensional Schrödinger equation*, Bull. Belgian Math. Soc., Supplement "Nonstandard Analysis" (1996) 71-90.

- [3] E. BENOÎT, *Enlacements de canards*, Publications I.H.E.S. 72 (1990) 63-91.
- [4] E. BENOÎT, J.L. CALLOT, F. DIENER, M. DIENER, *Chasse au canard*, Collect. Math., 31, 1-3 (1981) 37-119.
- [5] E. BENOÎT, A. FRUCHARD, R. SCHÄFKE, G. WALLET, *Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes-rapides à point tournant*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Vol. VII, no 4 (1998) (1-32).
- [6] E. BENOÎT, A. FRUCHARD, R. SCHÄFKE, G. WALLET, *Overstability : toward a global study*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I (1998) 873-878.
- [7] J.L. CALLOT, *Bifurcation du portrait de phase pour des équations différentielles linéaires du second ordre ayant pour type l'équation d'Hermite*, Thèse de Doctorat d'Etat, Strasbourg (1981).
- [8] J.L. CALLOT, *Champs lents-rapides complexes à une dimension lente*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4e Série, t. 26 (1993) 149-173.
- [9] M. CANALIS-DURAND, J.-P. RAMIS, R. SCHÄFKE, Y. SIBUYA, *Gevrey solutions of singularly perturbed differential equations*, A paraître à J. Reine Angew. Math. (1999) <http://www-irma.u-strasbg.fr/irma/publications/1999/99017.shtml>.
- [10] L.P. COOK, W. ECKHAUS, *Resonance in a boundary value problem of singular perturbation type*, Studies in Appl. Math., 52 (1973) 129-139.
- [11] F. DIENER, *Méthode du plan d'observabilité*, Thèse de Doctorat d'Etat, prépublication IRMA, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France (1981).
- [12] N. KOPELL, *A geometric approach to boundary layer problems exhibiting resonance*, SIAM. J. Appl. Math., 37 No2 (1979) 436-458.
- [13] W.D. LAKIN, *Boundary value problems with a turning point*, Studies in Appl. Math., 51 (1972) 261-275.
- [14] C.H. LIN, *The sufficiency of Matkowsky-condition in the problem of resonance*, Trans. Amer. Math. Soc. 278 Nr2 (1983) 647-670.
- [15] B.J. MATKOWSKY, *On boundary layer problems exhibiting resonance*, SIAM Review, 17-1 (1975) 82-100.
- [16] F.W.J. OLVER, *Sufficient conditions for Ackerberg-O'Malley resonance*, SIAM J. Math. Anal., 9 (1978) 328-355.
- [17] Y. SIBUYA, *A theorem concerning uniform simplification at a transition point and the problem of resonance*, SIAM J. Math. Anal., 12 (1981) 653-668.
- [18] W. WASOW, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Interscience, New York (1965).
- [19] W. WASOW, *Linear Turning Point Theory*, Springer, New York (1985).

A. Fruchard :  
Laboratoire de Mathématiques Calcul Asymptotique  
Université de La Rochelle  
Pôle Sciences et Technologie  
Avenue Marillac  
17042 La Rochelle cedex, FRANCE  
e-mail : [augustin.fruchard@univ-lr.fr](mailto:augustin.fruchard@univ-lr.fr) (Nextmail,Mime)

R. Schäfke :  
Département de Mathématiques  
Université Louis Pasteur  
7, rue René-Descartes  
67084 Strasbourg cedex, FRANCE.  
e-mail : [schaeffe@math.u-strasbg.fr](mailto:schaeffe@math.u-strasbg.fr)



## Liste des prépublications

- 99-1 Monique Jeanblanc et Nicolas Privault. A complete market model with Poisson and Brownian components.
- 99-2 Laurence Cherfils et Alain Miranville. Generalized Cahn-Hilliard equations with a logarithmic free energy.
- 99-3 Jean-Jacques Prat et Nicolas Privault. Explicit stochastic analysis of Brownian motion and point measures on Riemannian manifolds.
- 99-4 Changgui Zhang. Sur la fonction  $q$ -Gamma de Jackson.
- 99-5 Nicolas Privault. A characterization of grand canonical Gibbs measures by duality.
- 99-6 Guy Wallet. La variété des équations surstables.
- 99-7 Nicolas Privault et Jiang-Lun Wu. Poisson stochastic integration in Hilbert spaces.
- 99-8 Augustin Fruchard et Reinhard Schäfke. Sursabilité et résonance.